

KOMPLEKSIANALYYSI I

Harjoitus 8, kevät 2008

1. Laske raja-arvot

$$\text{a) } \lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^{z^2} - 1}{z^2 + 2z}, \quad \text{b) } \lim_{z \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos z}{z - \frac{\pi}{2}}, \quad \text{c) } \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\cos 2z - 1}{\sin^2 z}.$$

2. Laske tieintegraalit:

$$\text{a) } \int_{\gamma} (z^2 - z) dz; \gamma \text{ on murtoviiva } \gamma_1 \cup \gamma_2, \text{ missä}$$

$$\gamma_1(t) = (1 - t)i - t, \quad 0 \leq t \leq 1 \text{ ja}$$

$$\gamma_2(t) = -1 + t^2, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

$$\text{b) } \int_{\sigma} \operatorname{Im} z \, dz; \sigma = -\gamma, \text{ missä } \gamma \text{ kiertää yksikköympyrän positiiviseen kiertosuuntaan } 1 \rightarrow 1.$$

$$\text{c) } \text{Laske } \int_{\gamma} \bar{z}^2 dz, \text{ kun } \gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2, \text{ missä } \gamma_1 : z(t) = t + i, \quad 0 \leq t \leq 1 \\ \text{ja } \gamma_2 : z(t) = 1 + ti, \quad 1 \leq t \leq 3.$$

$$\text{d) } \text{Laske } \int_{\gamma} z^3 dz, \text{ kun } \gamma \text{ on ellipsin } x^2 + 4y^2 = 1 \text{ kaari pisteestä } z = 1 \\ \text{pisteeseen } z = \frac{1}{2}i.$$

3. Osoita, että

$$\left| \int_{\gamma} (x^2 + iy^2) dz \right| \leq \pi,$$

kun γ on ympyränkaari $i \rightarrow -i$.

4. Laske

$$\int_{\gamma} \frac{1}{\sqrt{z}} dz, \text{ kun } \gamma(t) = e^{it}, \quad t \in [-\pi, \pi].$$