

Kompleksianalyysi II

Harjoitus 3, kevät 2008

1. Laske seuraavat käyräintegraalit

a) $\int_{\gamma} \frac{\sin z}{z-i} dz$, kun $\gamma(t) = 2e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$,

b) $\int_{\gamma} \frac{\sin h z}{z - \pi i} dz$, kun $\gamma(t) = \pi i + 2e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

2. Olkoon f koko tasossa \mathbb{C} analyyttinen funktio, jolle

$$|f(z)| \leq \left| \frac{z+1}{z-1} \right|$$

aina kun $|z| > 2$. Osoita, että f on vakiofunktio.

3. Olkoon f analyyttinen alueessa A . Osoita, että ehdosta $|f(z)| = a = \text{vakio}$, $z \in A$ seuraa, että $f(z)$ on vakiofunktio A :ssa.

4. Osoita maksimiperiaate käyttämällä Gaussin keskiarvolausetta ja tehtävän 2 tulosta.

5. Olkoon f analyyttinen kiekossa $D_R(0)$. Oletetaan, että f ei ole vakiofunktio. Määritellään funktio g ehdolla

$$g(r) = \max_{z \in D_r(0)} |f(z)|, \quad 0 < r < R.$$

Osoita, että $g(r_1) < g(r_2)$, kun $0 < r_1 < r_2 < R$.

6. Olkoon f alueessa A analyyttinen funktio, jolla $|f|$:lla on lokaali minimikohta pisteessä $z_0 \in A$ ja $|f(z_0)| > 0$. Osoita, että f on vakiofunktio A :ssa.