KOMPLEKSIANALYYSI II

Harjoitus 4, kevät 2008

1. Oletetaan, että funktiot $f_n, n = 1, 2, 3, \cdots$, ovat jatkuvia joukossa $E \subset \mathbb{C}$. Oletetaan, että $f_n \to f$ tasaisesti E:ssä. Osoita, että f on jatkuva E:ssä.

2. Tutki funktiojonon $f_n, n = 1, 2, 3, \cdots$, suppenemista joukossa $E \subset \mathbb{C}$, kun
   a) $f_n(z) = \dfrac{nz}{z+n}, E = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$,
   b) $f_n(z) = \dfrac{nz}{nz+1}, E = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1\}$.

3. Tutki seuraavien sarjojen suppenemista
   a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+|z|}$, b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+|z|}$, c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+z}$, d) $\sum_{k=1}^{\infty} (1-|z|)z^k$.

4. Määrää seuraavien sarjojen suppenemissäteet ja suppenemiskiekot
   a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k+1} z^k$, b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} (z-1)^k$, c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} k^2 z^k$.

5. Määrää sarjan $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}i}\right)^{k+1} (z - \tfrac{1}{2}i)^k$ suppenemissäde. Määrää myös sarjan summa.

6. Tunntetusti $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z}$, kun $|z| < 1$. Määrää funktio $f(z) = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} kz^k$, kun $|z| < 1$.

7. Olkoon $f(z) = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \frac{z^6}{7!} + \cdots$. Tutki milloin sarja suppenee. Määrää $f(z)$:n lauseke. Onko f analyyttinen $\mathbb{C}$:ssä?