Koulumatematiikan perusteet

Harjoitus 5, kevät 2007

1. Osoita, että supistetussa muodossa olevan rationaaliluvun $\frac{m}{n}$ desimaalikehitelmä on päättyvä, jos ja vain jos sen nimittäjällä ei ole muita alkulukutekijöitä kuin 2 tai 5.

2. Osoita, että jos $a \in \mathbb{Z}_+$, niin $\sqrt[n]{a}$, $n \geq 2$, on irrationaaliluku, ellei ole olemassa sellaista luonnollista lukua b, että $a = b^n$.

3. Määrää luennoilla esitetyllä tavalla luvun $\sqrt{2}$ neljän desimaalin esitys.

4. Mitkä seuraavista väitteistä on tosia? (Tarkat perustelut)

   (a) Jos x on rationaaliluku ja y on irrationaaliluku, niin $x+y$ on irrationaaliluku.

   (b) Jos x ja y ovat rationaalilukuja, niin $x+y$ on rationaaliluku.

   (c) Jos x on irrationaaliluku ja y on rationaaliluku, niin $x+y$ on rationaaliluku.

   (d) Jos x ja y ovat irrationaalilukuja, niin $x+y$ on irrationaaliluku.

5. Osoita, että jos x ja y ovat positiivisia reaalilukuja ja $x < y$, niin on olemassa sellainen rationaaliluku r, että $x < r < y$.

6. Osoita seuraava Arkhimedeen ehdon muoto: Jos ϵ on positiivinen reaaliluku, niin on olemassa sellainen $n \in \mathbb{N}_0$, että $10^{-n} < \epsilon$.

Käytä tehtävissä 5 ja 6 desimaalikehitelmää.