

# ALGEBRA I

Harjoitus 2, kevät 2009

1. Todista: Jos  $n \geq 3$  ja  $n^2 + 2$  on alkuluku, niin  $3|n$ .
2. Olkoon  $n$  positiivinen kokonaisluku. Osoita, että luku  $n(n^2 + 2)$  on jaollinen luvulla 3.
3. Määrää  $syt$  ja  $pyj$  seuraaville luvuille ja esitä  $syt$  näiden kokonaislukujen lineaarikombinaationa:  
a) 478 ja 212,    b) 201 ja 1024.
4. Määrää sellaiset kokonaisluvut  $r$  ja  $s$ , että  $1841r + 3647s = 1$ .
5. Todista: Jos  $syt(a, b) = 1$  ja  $a|bc$ , niin  $a|c$ .  
(Vihje: Käytä lausetta 1.6.)
6. Todista: Jos  $c|ab$ , niin  $c|syt(a, c)b$ .
7. Osoita, että alkulukuja on ääretön määrä.  
(Vihje: Jos alkulukuja olisi vain äärellinen määrä, ne voitaisiin luetella:  $p_1, p_2, \dots, p_k$ . Tarkastele sitten lukua  $m = p_1 p_2 \dots p_k + 1$  ja johda ristiriita.)