

ALGEBRA I

Harjoitus 5, kevät 2009

1. Olkoon $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Mitkä seuraavista ovat A :n ekvivalenssirelaatioita:
 - a) $\{(1, 1), (2, 2), (1, 2), (2, 1), (3, 3), (4, 4)\}$,
 - b) $\{(1, 1), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (3, 4), (4, 4)\}$,
 - c) $\{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (4, 4)\}$.

2. Määritellään relaatio \sim joukossa \mathbb{Z} seuraavasti:

$$a \sim b \Leftrightarrow a = bm, m \in \mathbb{Z}.$$

Onko \sim ekvivalenssirelaatio?

3. Määritellään joukossa \mathbb{R} relaatio \sim asettamalla $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$. Osoita, että \sim on ekvivalenssirelaatio. Määrää $[\sqrt{2}]$.

4. Tutki, onko operaatio $(*)$ binäärinen operaatio seuraavissa tapauksissa

- a) $a * b = \frac{a+b}{3}$ joukossa \mathbb{Z} ,
- b) $a * b = a + \frac{ab}{7}$ joukossa \mathbb{Q} .

5. Merkitään $2\mathbb{Z} = \{2n | n \in \mathbb{Z}\}$. Osoita, että $(2\mathbb{Z}, +)$ on ryhmä.

6. Merkitään $S = \{2n + 1 | n \in \mathbb{Z}\} \cup \{0\}$. Onko $(S, +)$ ryhmä?

7. Osoita, että $(\mathbb{Z}, *)$ on ryhmä, kun $(*)$ määritellään seuraavasti:

$$a * b = a + b - 1. \text{ Onko } (\mathbb{Z}, *) \text{ Abelin ryhmä?}$$

8. Olkoon $S = \{x | x \in \mathbb{Q}, x \neq 0, x \neq 1\}$. Olkoot funktiot $f_1(x) = x$, $f_2(x) = \frac{1}{1-x}$ ja $f_3(x) = \frac{x-1}{x}$, jotka ovat määritelty joukossa S . Merkitään $G = \{f_1(x), f_2(x), f_3(x)\}$. Osoita, että (G, \circ) on ryhmä, missä (\circ) on funktioiden yhdistämisoperaatio eli $f_i(x) \circ f_j(x) = f_i(f_j(x))$ kaikilla $x \in S$.