ALGEBRA I

Harjoitus 6, kevät 2009

1. Kirjoita ryhmän $(\mathbb{Z}_6, +)$ ryhmätaulu.

2. Kirjoita ryhmän $(\mathbb{Z}_9^*, \bullet)$ ryhmätaulu.

3. Kirjoita ryhmän $(\mathbb{Z}_{12}^*, \bullet)$ ryhmätaulu. Määrää lisäksi jokaiselle alkiolle sen käänteisalkio.

4. Määrää seuraavien ryhmien kertaluvut:

   a) $\mathbb{Z}_{27}^*$, b) $\mathbb{Z}_{252}^*$, c)$\mathbb{Z}_{2000}^*$, d)$\mathbb{Z}_{1776}^*$.

5. Totea, että [39] on ryhmän $\mathbb{Z}_{980}^*$ alkio. Määrää alkion [39] käänteisalkio ko. ryhmässä.

6. Olkoon G ryhmä ja e sen neutraalialkio. Oletetaan lisäksi, että $g^2 = e$ aina, kun $g \in G$. Osoita, että G on Abelin ryhmä.

7. Olkoon G ryhmä ja $(xy)^3 = x^3y^3$ sekä $(xy)^5 = x^5y^5$aina, kun $x, y \in G$. Osoita, että G on Abelin ryhmä.

8. Olkoot a ja x ryhmän G alkioita ja $x^2 = 1$ sekä $xax = a^3$. Osoita, että $a^8 = 1$.

9. Olkoon G ryhmä ja $|G| = 2r$, missä $r \geq 1$. Osoita, että ryhmässä G on kertalukua kaksi oleva alkio. (Siis $x \in G$, $x \neq e$ ja $x^2 = e$.) (Vihje: epäsuora todistus).