ALGEBRA I

Harjoitus 9, kevät 2009

1. Ryhmän $(\mathbb{Z}_{20}, +)$ aliryhmällä $H = \{[0], [4], [8], [12], [16]\}$ on neljä sivuluokkaa. Muodosta tekijäryhmän $\mathbb{Z}_{20}/H$ ryhmätaulu.

2. Ryhmällä $(\mathbb{Z}_{15}^*, \cdot)$ on normaali syklinen aliryhmä $N = \langle [4] \rangle$. Muodosta tekijäryhmän $\mathbb{Z}_{15}^*/N$ ryhmätaulu.

3. Onko tehtävän 2. ryhmällä $\mathbb{Z}_{15}^*$ kertalukua neljä olevaa normaalia aliryhmää? Myönteisessä tapauksessa muodosta vastaava tekijäryhmä.

4. Olkoon $G =< a >$ kertalukua yhdeksän oleva syklinen ryhmä. Osoita, että $K = \{e, a^3, a^6\}$ on G:n normaali aliryhmä. Muodosta tekijäryhmän G/K ryhmätaulu.

5. Onko tehtävän 4. ryhmällä G kertalukua kaksi olevaa normaalia aliryhmää? Jos on, niin muodosta vastaava tekijäryhmä.

6. Olkoon G ryhmä ja $Z(G) = \{x \in G \mid xg = gx \quad \forall \quad g \in G\}$. Osoita, että ryhmän G keskus $Z(G)$ on ryhmän G normaalialiryhmä.

7. Olkoon G ryhmä ja $M \trianglelefteq G$ sekä $N \trianglelefteq G$. Osoita, että $M \cap N \trianglelefteq G$.

8. Olkoon G ryhmä ja M sekä N ryhmän G normaaleja aliryhmiä. Todista: Jos
   $M \cap N = \{e\}$, niin $xy = yx$ aina, kun $x \in M$ ja $y \in N$.

9. Olkoon $(G, \cdot)$ ryhmä ja H ryhmän G aliryhmä, eli $H \leq G$. Oletetaan, että aliryhmän H vasemmanpuoleisten sivuluokkien lukumäärä ryhmässä G on 2, eli $|G|/|H| = 2$. Tällöin myös aliryhmän H oikeanpuoleisten sivu- luokkien lukumäärä ryhmässä G on 2. Osoita, että H on ryhmän G normaali aliryhmä, eli $H \trianglelefteq G$.