ALGEBRA I
Harjoitus 11, kevät 2009

1. Olkoon $\alpha, \beta, \gamma \in S_4$,
$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ ja $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.
Määrää $\alpha \circ \beta, \beta \circ \alpha, \alpha \circ \gamma$ ja $\gamma \circ \alpha$.

2. Määrää tehtävän 1 permutaatioiden käänteisalkiot α^{-1}, β^{-1} ja γ^{-1} sekä ryhmien $< \alpha >, < \beta >$ ja $< \gamma >$ kertaluvut.

3. Tarkastellaan ryhmää S_3, jonka alkioita ovat permutaatiot
$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$,
$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $\sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\sigma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.
Ratkaise tässä ryhmässä yhtälö $\sigma_1 \circ x = \sigma_5$. Tutki, ovatko joukot $H_1 = \{e, \sigma_4\}$ ja $H_2 = \{e, \sigma_1, \sigma_2\}$ ryhmän S_3 normaaleja aliryhmiä.

4. Olkoot $(G, \cdot)$ syklinen ryhmä, $(H, *)$ ryhmä sekä $|G| = |H|$. Ryhmät $(G, \cdot)$ ja $(H, *)$ ovat isomorfiset jos ja vain jos $(H, *)$ on syklinen ryhmä.

5. Olkoon G ryhmä, $N \trianglelefteq G$ ja $\{eN\} < H \triangleleft G/N$. Osoita, että on olemassa sellainen ryhmä G normaali aliryhmä M, että
$$N < M \triangleleft G.$$

6. Olkoon G ryhmä sekä N ja M sellaisia ryhmän G normaaleja aliryhmiä, että
$$N < M \triangleleft G.$$
Osoita, että
$$\{eN\} < M/N \triangleleft G/N.$$