ALGEBRA I

Harjoitus 12, kevät 2009

1. Määritellään joukossa $\mathbb{Z}$ laskutoimitukset $(*)$ ja $(\circ)$ seuraavasti:
$$a * b = a + b + 1,$$
$$a \circ b = a + b + ab.$$
Osoita, että $(\mathbb{Z}, *, \circ)$ on kommutatiivinen rengas.

2. Olkoon $S = \{A \mid A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R}\}$. Osoita, että $(S, +, \cdot)$ on rengas, missä $(+)$ ja $(\cdot)$ ovat matriisien yhteenlasku ja kertolasku operaatiot. Onko kyseessä kommutatiivinen rengas?

3. Osoita, että Gaussin kokonaislukujen joukko $\mathbb{Z}[i] = \{z \in \mathbb{C} \mid z = a + bi; a, b \in \mathbb{Z}\}$ muodostaa renkaan.
(Vihje: Osoita, että $\mathbb{Z}[i]$ on renkaan $\mathbb{C}$ alirengas).

4. Onko $S = \{x \in \mathbb{R} | x = a + b\sqrt{2},\ a, b \in \mathbb{Z}\}$ reaalilukujen renkaan $\mathbb{R}$ alirengas?

5. Rengasta R sanotaan Boolen renkaaksi, mikäli $x^2 = x$ aina, kun $x \in R$. Osoita, että Boolen rengas on kommutatiivinen.

6. Olkoot M ja N renkaan R ideaaleja. Osoita, että myös $M \cap N$ on renkaan R ideaali.