ALGEBRA I

Harjoitus 13, kevät 2009

1. Määrää renkaan $(\mathbb{Z}_8, +, \cdot)$ kaikki ideaalit. Mitkä näistä ideaaleista ovat maksimaalisia?

2. Olkoon $M = \{3x + 3yi | x, y \in \mathbb{Z}\}$.

   a) Osoita, että M on renkaan $\mathbb{Z}[i]$ ideaali.

   b) Osoita, että M on renkaan $\mathbb{Z}[i]$ maksimaalinen ideaali.

   Huom: $\mathbb{Z}[i]$ on määritelty H12T3!

3. Tarkastellaan rengasta $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ja sen ideaaleja $I = (12)$ ja $J = (21)$. Millainen ideaali on $I \cap J$?

4. Olkoon $E = \{x \in \mathbb{R} | x^2 \in \mathbb{Q}\}$. Tutki, onko $(E, +, \cdot)$ kunta.

5. Tarkastellaan joukkoa $F = \{a + b\sqrt{2} | a, b \in \mathbb{Q}\}$. Selvästi $(F, +, \cdot)$ on kommutatiivinen rengas (vertaa harj. 12 teht. 4). Osoita, että $(F, +, \cdot)$ on kunta.

6. Olkoon K äärellinen kunta ja char$K$=2. Osoita, että $(a + b)^2 = a^2 + b^2$ aina, kun a ja b ovat K:n alkioita.