KOMPLEKSIANALYYSI I

Harjoitus 3, kevät 2009

1. Osoita, että joukko $\{z \in \mathbb{C} |\ |z - z_0| > r\}$ on avoin ($z_0 \in \mathbb{C}, r > 0$ annettuja).

2. Olkoon $A = \{i, \frac{i}{2}, \frac{i}{3}, \cdots\} \subset \mathbb{C}$. Tutki onko A rajoitettu, suljettu, avoin. Määrää $A^0, A'cl(A)$.

3. Määrää pisteiden $1 + i$ ja $-3 + 2i$ kautta kulkevan suoran yhtälö
   a) parametrimuodossa,
   b) muodossa $ax + by = d,\ a, b, d \in \mathbb{R}$,
   c) muodossa $\bar{a}z + \alpha\bar{z} = \gamma, \alpha \in \mathbb{C}$ ja $\gamma \in \mathbb{R}$. Määrää myös y.o. pisteiden välisen janan yhtälö.

4. Määrää seuraavat raja-arvot (mikäli ovat olemassa)

   a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{i^n}{n}$, b) $\lim\limits_{n\to\infty} i^n$, c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(1+i)^n}{n}$, d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n - in^2}{(1+i)n^-1}$.

5. Osoita, että $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = e^x(\cos y + i \sin y)$, kun $z = x + iy \in \mathbb{C}$.

6. Olkoon jono $(z_n) \subset \mathbb{C}$ määritelty ehdoilla $z_0 = 3$ ja $z_{n+1} = \frac{1}{3}z_n + 2i$. Osoita, että jono (z_n) suppenee ja määrää sen raja-arvo.