KOMPLEKSIANALYYSI I

Harjoitus 4, kevät 2009

1. Olkoon $f(z) = 2z - i, z \in \mathbb{C}$. Osoita, että f on bijektio $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ja määrää käänteisfunktio f^{-1}. Määrää myös $f(L)$, kun L on origon kautta kulkeva suora. Määrää myös $f(S_r(0))$.

2. Olkoon $f(z) = \frac{1}{z}, z \in \mathbb{Z}, z \neq 0$. Osoita, että f on bijektio. $\mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Määrää käänteisfunktio f^{-1}. Määrää myös $f(L \setminus \{0\})$ ja $f(S_r(0))$.
   (L origon kautta kulkeva suora.)

3. Määrää funktio $f(z) = f(x+iy)$ muodossa $f(z) = u(x,y)+iv(x,y), z \in \mathcal{M}(f)$, kun

   a) $f(z) = z^3, z \in \mathbb{C}$, b) $f(z) = \frac{1}{z^2}, z \neq 0$, c) $f(z) = e^{iz}, z \in \mathbb{C}$.

4. Osoita, että funktion raja-arvo $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = a$ (mikäli on olemassa) on yksikäsitteinen.

5. Tutki funktion $f(z)$ raja-arvon olemassaoloa pisteessä $z = 0$, kun

   a) $f(z) = \frac{Rez}{z}$, b) $f(z) = \frac{z}{|z|}$, c) $f(z) = \frac{zRez}{|z|}$.

6. Laske raja-arvo $\lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{z^3 + z^2 + z + 1}{z - z_0}$, kun

   a) $z_0 = -1$, b) $z_0 = i$, c) $z_0 = -i$.

7. Osoita jatkuvuuden määritelmän avulla, että funktio $f(z) = z^2 + 2z,\ z \in \mathbb{C}$, on jatkuva jokaisessa pisteessä $z_0 \in \mathbb{C}$.