KOMPLEKSIANALYYSI I

Harjoitus 6, kevät 2009

1. Osoita, että funktio $f(z) = ze^z$ on analyyttinen $\mathbb{C}$:ssä. Määrää $f'(z)$.

2. Oletetaan, että g on koko $\mathbb{C}$:ssä analyyttinen funktio. Määritellään funktio $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ asettamalla $f(z) = \overline{g(\bar{z})}$, kun $z \in \mathbb{C}$. Tutki onko f analyyttinen $\mathbb{C}$:ssä.

3. Olkoon $f(z) = f(x + iy) = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3), z = x + iy \in \mathbb{C}$. Osoita, että f toteuttaa Cauchy-Riemannin yhtälöt. Määrää $f'(z)$.

4. Olkoon $f(z) = z^3, z \in S[\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3})$. Tällöin $f^{-1} : \mathbb{C} \to S[\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3})$ on olemassa. Määrää $(f^{-1})'(i)$ ja $(f^{-1})'(-1)$.

5. Osoita, että

   a) $e^{\bar{z}} = \overline{e^z}$, b) $\sin \bar{z} = \overline{\sin z}$ aina, kun $z \in \mathbb{C}$.

6. Määrää

   a) $\log(-4)$, b) $\log 3i$, c) $\log(\sqrt{3} - i)$.

7. Määrää

   a) i^{2i}, b) $(-i)^i$, c) i^{-i}.