

KOMPLEKSIALYYSI I

Harjoitus 7, kevät 2009

1. Osoita, että $\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$ aina, kun $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

2. Määräää derivaatta $f'(z)$, kun

a) $f(z) = \cos(z^2 + iz)$, b) $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$.

3. Määräää

a) i^{2i} , b) $(-i)^i$, c) i^{-i} .

4. Osoita, että

$$\arctan z = \frac{1}{2i} \log \left(\frac{1+zi}{1-zi} \right).$$

5. Laske raja-arvot

a) $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^{z^2} - 1}{z^2 + 2z}$, b) $\lim_{z \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos z}{z - \frac{\pi}{2}}$, c) $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\cos 2z - 1}{\sin^2 z}$.

6. Laske tieintegraalit:

a) $\int_{\gamma} (z^2 - z) dz$; γ on murtoviiva $\gamma_1 \cup \gamma_2$, missä

$$\gamma_1(t) = (1-t)i - t, \quad 0 \leq t \leq 1 \text{ ja}$$

$$\gamma_2(t) = -1 + t^2, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

b) $\int_{\sigma} \operatorname{Im} z dz$; $\sigma = -\gamma$, missä γ kiertää yksikköympyrän positiiviseen kiertosuuntaan $1 \rightarrow 1$.

c) Laske $\int_{\gamma} \bar{z}^2 dz$, kun $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$, missä $\gamma_1 : z(t) = t + i$, $0 \leq t \leq 1$ ja $\gamma_2 : z(t) = 1 + ti$, $1 \leq t \leq 3$.

d) Laske $\int_{\gamma} z^3 dz$, kun γ on ellipsin $x^2 + 4y^2 = 1$ kaari pisteestä $z = 1$ pisteeeseen $z = \frac{1}{2}i$.