

# Koulumatematiikan perusteet

## Harjoitus 1

- Piirrä Venn-diagrammi perusjoukosta  $E = \{\text{tasokuviot}\}$  ja sen osajoukoista  $\{\text{nelikulmiot}\}$ ,  $\{\text{kolmiot}\}$ ,  $\{\text{monikulmiot}\}$ ,  $\{\text{suorakulmiot}\}$ ,  $\{\text{neliöt}\}$ ,  $\{\text{suunnikkaat}\}$  ja  $\{\text{puolisuunnikkaat}\}$
- Esitä luku 2480 egyptiläistä merkintätapaa käyttäen.
  - Egyptiläiset laskivat usein lukujen  $m, n \in \mathbb{N}$  tulon kahdentamalla luvun  $n$  riittävän monta kertaa ja laskemalla tämän jälkeen kahdentamalla saatuja lukuja yhteen. Laske tällä tavalla tulo  $12 \cdot 12$  (egyptiläistä merkintätapaa käyttäen).
  - Laskennan nopeuttamiseksi egyptiläiset kertoivat luvun usein kymmenellä ja tarvittaessa he saattoivat myös puolittaa saadun tulon. Laske tähän tapaan tulo  $16 \cdot 16$  (egyptiläistä merkintätapaa käyttäen).
- Osoita ilman Lausetta 2.3.1, että  $0 \cdot m = 0$  ja  $1 \cdot m = m$  kaikilla  $m \in \mathbb{N}_0$ .
- Määritellään luonnollisten lukujen potenssi rekursiivisesti asettamalla

$$m^0 = 1, \quad m^{n+1} = m^n \cdot m.$$

Osoita induktiolla, että kaikilla  $m, n, r \in \mathbb{N}_0$

- $m^{n+r} = m^n \cdot m^r$ ,
  - $m^{n \cdot r} = (m^n)^r$ ,
  - $(m \cdot n)^r = m^r \cdot n^r$ .
- Osoita induktiolla, että

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2 \quad \text{kaikilla } n \in \mathbb{N}.$$

- Osoitamme induktiolla väitteen ”Jos  $n$  naisen joukossa on ainakin yksi vaalea, niin joukon kaikki naiset ovat vaaleita.” Väite pätee, jos  $n = 1$ . Tehdään induktio-oletus, jonka mukaan väite on tosi arvolla  $n = k$ . Olkoon  $\{a_1, a_2, \dots, a_{k+1}\}$   $k + 1$  naisen joukko, joka sisältää ainakin yhden vaalean. Rajoituksetta voidaan olettaa, että  $a_1$  on vaalea. Joukko  $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$  koostuu induktio-oletuksen mukaan vaaleista. Joukko  $\{a_2, \dots, a_{k+1}\}$  sisältää tällöin ainakin yhden vaalean, joten sekin koostuu induktio-oletuksen mukaan vaaleista. Näin joukon  $\{a_1, a_2, \dots, a_{k+1}\}$  kaikki naiset ovat vaaleita, joten väite seuraa induktioperiaatteesta. Missä vika?