

Koulumatematiikan perusteet

Harjoitus 4

1. Määrää eräät sellaiset kokonaisluvut x ja y , että $127x - 87y = 1$.
2. Osoita, että jos p on alkuluku sekä a ja b ovat sellaisia kokonaislukuja, että $p \mid ab$, niin $p \mid a$ tai $p \mid b$.
3. Osoita, että $[pm, pn] = [m, n]$ ja $-[m, n] = [-m, n]$ kaikilla $[m, n] \in \mathbb{Q}$ ja $p \in \mathbb{Z}$, $p \neq 0$.

4. Osoita, että rationaaliluvut toteuttavat *tiheysominaisuuden*:
Jos $[a, b], [c, d] \in \mathbb{Q}$ ja $[a, b] < [c, d]$, niin on olemassa sellainen $[m, n] \in \mathbb{Q}$, että

$$[a, b] < [m, n] < [c, d].$$

5. Osoita, että rationaaliluvut toteuttavat *Arkhimedeen ominaisuuden*:
Jos $[a, b]$ ja $[c, d]$ ovat positiivisia kokonaislukuja, niin on olemassa sellainen kokonaisluku $[p, 1]$, että

$$[a, b] \cdot [p, 1] > [c, d].$$

(Vihje: Voidaan olettaa, että a, b, c ja d ovat positiivisia. Valitaan $p = 2bc$.)

6. Rationaaliluvun $\frac{m}{n}$ sanotaan olevan supistetussa muodossa, jos $\text{syt}(m, n) = 1$. Esitä supistetussa muodossa rationaaliluvut

$$\frac{84}{24}, \frac{15}{81}, \frac{-289}{17} \text{ ja } \frac{3701}{2311}.$$