Koulumatematiikan perusteet

Harjoitus 6

1. Määrää (luennolla esitetyllä tavalla) luvun $\sqrt{2}$ neljän desimaalin esitys.

2. Osoita, että jos x ja y ovat positiivisia reaalilukuja ja $x < y$, niin on olemassa sellainen rationaaliluku r, että $x < r < y$.

3. Osoita seuraava Arkhimedeen ehdon muoto: Jos ε on positiivinen reaaliluku, niin on olemassa sellainen $n \in \mathbb{N}_0$, että $10^{-n} < \varepsilon$.

   Käytä tehtävissä 2 ja 3 desimaalikehitelmää.

4. Osoita Lause 6.5.3 (Täydellisyysaksiomi).

Olkoot r_1 ja r_2 reaalilukuja ja olkoot niiden esitykset $a_0 \odot a_1 a_2 \ldots$ ja $b_0 \odot b_1 b_2 \ldots$. Merkitään $r_1^0 = a_0$ ja jokaisella $n \in \mathbb{Z}_+$ $r_1^n = a_0 \odot a_1 \ldots a_n$. Vastaavasti merkitään $r_2^0 = b_0$ ja $r_2^n = b_0 \odot b_1 \ldots b_n, n \in \mathbb{Z}_+$. Olkoon $s_n = r_1^n + r_2^n$. Lukujen r_1 ja r_2 summa määritellään asettamalla

$$r_1 + r_2 = \sup\{s_n \mid n \in \mathbb{N}_0\}.$$

5. Osoita, että reaalilukujen yhteenlasku on hyvin määritelty.

6. Osoita reaalilukujen yhteenlaskun määritelmän mukaan, että
   (a) $2,13 + (-3,99) = -1,86$,
   (b) $0,\overline{1} + 0,\overline{2} = 0,\overline{3}$.