

Koulumatematiikan perusteet

Harjoitus 7

- Määrää alkioden a) $0, \bar{2}$ b) $-1, 87$ vasta-alkiot.
- a) Osoita reaalilukujen tulon määritelmän mukaan, että
$$(-1,9) \cdot 0,5 = -0,95 \quad \text{ja} \quad 0, \bar{1} \cdot 0,6 = 0,0\bar{6}.$$
b) Määrää alkion $0, \bar{1}$ käänteisalkio.
- Olkoon X perusjoukko. Osoita, että joukkojen yhtämahtavuus on ekvivalenssirelaatio joukossa $\mathcal{P}(X)$.
- Osoita, että
 - $|\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}| = |\mathbb{R}_+|$,
 - $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}|$,
 - $|\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0| = |\mathbb{N}_0|$ (käyttämällä funktiota $f(m, n) = 2^m(2n + 1) - 1$).
- Olkoot $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $a < b$ ja $c < d$. Merkitään $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$. Osoita, että $]a, b[=]c, d[$.
- Osoita, että $]0, \varepsilon[$ on ylinumeroituva olipa $\varepsilon > 0$ kuinka pieni tahansa.
- (Tehtävä on lainaus tieteiskirjailija Stanislaw Lemin The Installer Milkman, Ion the Quiet.) Ion saapui hotelli Kosmoksen pihalle aikoen yöpyä hotellissa. Hotellissa on äärettömän monta huonetta h_1, h_2, h_3, \dots . Valitettavasti hotelli on täynnä, mutta onneksi paikalle sattui hotellin neuvokas johtaja, joka järjesti asian: Ion pääsi huoneeseen h_1 , jossa ollut henkilö siirrettiin huoneeseen h_2 , jossa ollut henkilö siirrettiin huoneeseen h_3 jne.
 - Seuraavana aamuna hotelliin pyrki äärettömän monta uutta vierasta, nimittäin universaalin filatelistikongressin osallistujat f_1, f_2, f_3, \dots . Hetken mietittyään hotellin johtaja keksi keinon, millä nämäkin vieraat saatiin majoitetuksi hotelli Kosmokseen. Mikä oli tämä keino?
 - Illalla vaikeudet jatkuivat. Galakseissa g_1, g_2, \dots oli jokaisessa hotelli Kosmoksen kaltainen hotelli, ja nämä kaikki hotellit olivat täynnä. Jostakin syystä kaikki muut hotellit paitsi Kosmos päätettiin sulkea, ja niiden asukkaat kuljetettiin Kosmokseen. Hotellin johtaja oli epätoivoissaan, sillä hänen oli sijoitettava äärettömän monen hotellin vieraat, joita kussakin oli äärettömän monta, jo entuudestaan täyteen Kosmokseen. Onneksi muuan filatelisti, joka oli ammatiltaan matemaatikko, keksi ratkaisun. Mikä oli hänen ratkaisu?

- c) Kosmoksen johtaja määrättiin laatimaan luettelo kaikista mahdollisista tavoista, joilla vieraita voidaan sijoittaa tähän hotelliin. Täyttä huonetta tarkoitti luku 1 ja tyhjää luku 0. Esimerkiksi 10101010... tarkoitti, että paritonnumeroiset huoneet ovat varattuja ja parilliset vapaita, jono 111111... tarkoitti sitä, että hotelli on täynnä, ja 000000... sitä, että hotelli on tyhjä. Parin päivän ahkeran työn jälkeen Kosmoksen johtaja tuli Ionin luo mukanaan äärettömän pitkä lista äärettömiä jonoja nollia ja ykkösiä. Ion väitti, ettei listassa voi olla kaikkia mahdollisia tapoja vieraiden sijoittamiseksi. Miten hän perusteli väitteensä?