ALGEBRA I

Harjoitus 10, kevät 2010

1. Ryhmällä $(\mathbb{Z}_{20}, +)$ on aliryhmä $H = \{[0], [4], [8], [12], [16]\}$. Muodosta tekijäryhmän $\mathbb{Z}_{20}/H$ ryhmätaulu. Miksi tekijäryhmä $\mathbb{Z}_{20}/H$ on olemassa?

2. Ryhmällä $(\mathbb{Z}_{15}^*, \cdot)$ on normaali syklinen aliryhmä $N = \langle [4] \rangle$. Muodosta tekijäryhmän $\mathbb{Z}_{15}^*/N$ ryhmätaulu.

3. Onko tehtävän 2. ryhmällä $\mathbb{Z}_{15}^*$ kertalukua neljä olevaa normaalia aliryhmää? Myönteisessä tapauksessa muodosta vastaava tekijäryhmä.

4. Olkoon $G =< a >$ kertalukua yhdeksän oleva syklinen ryhmä.
   Osoita, että $K = \{e, a^3, a^6\}$ on G:n normaali aliryhmä. Muodosta tekijäryhmän G/K ryhmätaulu.

5. Onko tehtävän 4. ryhmällä G kertalukua kaksi olevaa normaalia aliryhmää? Jos on, niin muodosta vastaava tekijäryhmä.

6. Tarkastellaan ryhmää S_3, jonka alkioita ovat permutaatiot
   $$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$
   $$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \sigma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$
   Tutki, ovatko joukot $H_1 = \{e, \sigma_4\}$ ja $H_2 = \{e, \sigma_1, \sigma_2\}$ ryhmän S_3 normaaleja aliryhmiä. Muodosta normaalin aliryhmän tapauksessa tekijäryhmä ja sen ryhmätaulu.

7. Olkoon $(G, \cdot)$ ryhmä ja H ryhmän G aliryhmä, eli $H \leq G$. Oletetaan, että aliryhmän H vasemmanpuoleisten sivuluokkien lukumäärä ryhmässä G on 2, eli $|G|/|H| = 2$. Tällöin myös aliryhmän H oikeanpuoleisten sivu- luokkien lukumäärä ryhmässä G on 2. Osoita, että H on ryhmän G normaali aliryhmä, eli $H \trianglelefteq G$.

8. Olkoon G ryhmä ja M sekä N ryhmän G normaaleja aliryhmiä. Todista: Jos $M \cap N = \{e\}$, niin $xy = yx$ aina, kun $x \in M$ ja $y \in N$.