

ALGEBRA I

Harjoitus 11, kevät 2010

1. Olkoon G Abelin ryhmä ja $f : G \rightarrow G$, $f(a) = a^2$.
Osoita, että f on ryhmähomomorfismi.
2. Olkoon $G = \mathbb{Z}_7^*$ ja f kuten tehtävässä 1. Määrä $Im(f)$ ja $Ker(f)$.
3. Olkoon G ryhmä ja $f : G \rightarrow G$, $f(a) = a^{-1}$.
Osoita, että f on ryhmähomomorfismi, jos ja vain jos G on Abelin ryhmä.
4. Olkoot (G, \cdot) syklinen ryhmä, $(H, *)$ ryhmä sekä $|G| = |H|$. Ryhmät (G, \cdot) ja $(H, *)$ ovat isomorfiset jos ja vain jos $(H, *)$ on syklinen ryhmä.
5. Ovatko ryhmät $(\mathbb{Z}_4, +)$ ja (\mathbb{Z}_9^*, \cdot) isomorfiset?
6. Ovatko ryhmät $(\mathbb{Z}_4, +)$ ja (\mathbb{Z}_8^*, \cdot) isomorfiset?
7. Kuvaus $f : (\mathbb{Z}_{32}^*, \cdot) \rightarrow (\mathbb{Z}_{32}^*, \cdot)$, $f(a) = a^2$ on ryhmähomomorfismi. Osoita, että $(\mathbb{Z}_{32}^*/Ker(f), \cdot) \cong (\mathbb{Z}_4, +)$.
8. Olkoot $M = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ ja } \det A \neq 0 \right\}$
ja $N = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ ja } \det A = 1 \right\}$.
Osoita, että $(N, \cdot) \leq (M, \cdot)$ ja $(M/N, \cdot) \cong (\mathbb{R}^*, \cdot)$ ($\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$).