

ALGEBRA I

Harjoitus 12, kevät 2010

1. Määritellään joukossa \mathbb{Z} laskutoimitukset $(*)$ ja (\circ) seuraavasti:

$$a * b = a + b + 1,$$

$$a \circ b = a + b + ab.$$

Osoita, että $(\mathbb{Z}, *, \circ)$ on kommutatiivinen rengas.

2. Olkoon $M = \{A \mid A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$. Osoita, että $(M, +, \cdot)$ on rengas, missä $(+)$ ja (\cdot) ovat matriisien yhteenlasku ja kertolasku operaatiot. Onko kyseessä kommutatiivinen rengas?

3. Olkoon $S = \{A \mid A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R}\}$. Osoita, että $(S, +, \cdot)$ on rengas. Onko $(S, +, \cdot)$ tehtävän 2 renkaan $(M, +, \cdot)$ alirengas?

4. Olkoon $T = \{A \mid A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R}\}$. Onko $(T, +, \cdot)$ renkaan $(M, +, \cdot)$ alirengas?

5. Onko $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = a + b\sqrt{2}, a, b \in \mathbb{Z}\}$ reaalilukujen renkaan \mathbb{R} alirengas?

6. Rengasta R sanotaan Boolean renkaaksi, mikäli $x^2 = x$ aina, kun $x \in R$. Osoita, että Boolean rengas on kommutatiivinen.