ALGEBRA I

Harjoitus 13, kevät 2010

1. Olkoot M ja N renkaan R ideaaleja. Osoita, että myös $M \cap N$ on renkaan R ideaali.

2. Määrää renkaan $(\mathbb{Z}_8, +, \cdot)$ kaikki ideaalit. Mitkä näistä ideaaleista ovat maksimaalisia?

3. Olkoon $M = \{3x + 3yi | x, y \in \mathbb{Z}\}$.

   a) Osoita, että M on renkaan $\mathbb{Z}[i]$ ideaali.

   b) Osoita, että M on renkaan $\mathbb{Z}[i]$ maksimaalinen ideaali.

   Huom: Cauchyn kokonaislukujen joukko $\mathbb{Z}[i]$ on määritelty luennoilla.

4. Tarkastellaan rengasta $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ja sen ideaaleja $I = (12)$ ja $J = (21)$. Millainen ideaali on $I \cap J$?

5. Osoita, että $I = \{[0], [3], [6], [9]\}$ on renkaan $(\mathbb{Z}_{12}, +, \cdot)$ ideaali. Määrää tekijärenkaan $(\mathbb{Z}_{12}/I, +, \cdot)$ alkiot ja laskutaulukot.

6. Osoita, että rengas $S = \{x \in \mathbb{R} | x = a + b\sqrt{2}, a, b \in \mathbb{Z}\}$ on kokonaisalue.

7. Ratkaise kokonaisalueessa yhtälö $x^2 = x$.