ALGEBRA I

Harjoitus 14, kevät 2010

1. Olkoon $E = \{x \in \mathbb{R} | x^2 \in \mathbb{Q}\}$. Tutki, onko $(E, +, \cdot)$ kunta.

2. Tarkastellaan joukkoa $F = \{a+b\sqrt{2} | a, b \in \mathbb{Q}\}$. Selvästi $(F, +, \cdot)$ on kommutatiivinen rengas (vertaa harj. 12 teht. 5). Osoita, että $(F, +, \cdot)$ on kunta.

3. Olkoon K äärellinen kunta ja char$K$=2. Osoita, että $(a+b)^2 = a^2 + b^2$ aina, kun a ja b ovat K:n alkioita.

4. Tiedetään, että $I = \{[0], [3], [6], [9]\}$ on renkaan $\mathbb{Z}_{12}$ ideaali (harjoitus 13). Onko $(\mathbb{Z}_{12}/I, +, \cdot)$ kunta?

5. Määrää polynomien $[2]x^2 + [1]x + [1]$ ja $[4]x + [3]$ tulo renkaassa $\mathbb{Z}_8[x]$.
   Miksi Lause 4.3.3 ei päde?

6. Tutki polynomin $[1]x^3 + [1]x^2 + [2] \in \mathbb{Z}_3[x]$ jaollisuutta.

7. Olkoon $ax^3 + bx^2 + cx + d \in K[x]$ astetta kolme oleva jaoton polynomi (K on kunta). Osoita, että myös $dx^3 + cx^2 + bx + a$ on jaoton polynomi.

8. Määrää kaikki astetta kaksi olevat jaottomat polynomit renkaassa $\mathbb{Z}_2[x]$.

9. Jaa polynomi $f(x) = [1]x^3 + [1]x^2 + [1]x + [1]$ tekijöihin renkaassa $\mathbb{Z}_3[x]$.

10. Ratkaise yhtälö
$$[5]x^2 - [6]x + [1] = [0]$$
kunnassa $(\mathbb{Z}_{19}, +, \cdot)$.