

ALGEBRA I

Harjoitus 2, kevät 2010

1. Todista: Jos $n \geq 3$ ja $n^2 + 2$ on alkuluku, niin $3|n$.
2. Olkoon n positiivinen kokonaisluku. Osoita, että luku $n(n^2 + 2)$ on jaollinen luvulla 3.
3. Osoita, että suurin yhteinen tekijä on yksikäsitteinen.
4. Määrää syt ja pyj seuraaville luvuille ja esitä syt näiden kokonaislukujen lineaarikombinaationa:
 - a) 478 ja 212, b) 201 ja 1024.
 - c) Esitä luku 3 lukujen 201 ja 1024 lineaarikombinaationa.
5. Määrää sellaiset kokonaisluvut r ja s , että $1841r + 3647s = 1$.
6. Olkoot a, b ja m positiivisia kokonaislukuja. Osoita, että $\text{syt}(ma, mb) = m \text{syt}(a, b)$.
7. Todista: Jos $c|ab$, niin $c|\text{syt}(a, c)b$.
8. Osoita, että alkulukuja on ääretön määrä.
(Vihje: Jos alkulukuja olisi vain äärellinen määrä, ne voitaisiin luetella: p_1, p_2, \dots, p_k . Tarkastele sitten lukua $m = p_1 p_2 \dots p_k + 1$ ja johda ristiriita.)