

ALGEBRA I

Harjoitus 5, kevät 2010

1. Olkoon $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Mitkä seuraavista ovat A :n ekvivalenssirelaatioita:

- a) $\{(1, 1), (2, 2), (1, 2), (2, 1), (3, 3), (4, 4)\}$,
- b) $\{(1, 1), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (3, 4), (4, 4)\}$,
- c) $\{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (4, 4)\}$.

2. Määritellään relaatio \sim joukossa \mathbb{Z} seuraavasti:

$$a \sim b, \text{ jos on olemassa sellainen kokonaisluku } m \in \mathbb{Z}, \text{ että } a = bm.$$

Onko \sim ekvivalenssirelaatio?

3. Määritellään joukossa \mathbb{R} relaatio \sim asettamalla $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$. Osoita, että \sim on ekvivalenssirelaatio. Määrää $[\sqrt{2}]$.

4. Laske $\varphi(n)$, kun n on

- a) 27, b) 252, c) 2000, d) 1776.

5. Luku 44^{49} jaetaan luvulla 105. Mikä on jakojäännös?

6. Määrää luvun 41^{82} kaksi viimeistä numeroa.

7. Määrää luvun 7^{1999} kolme viimeistä numeroa.

8. Tarkastellaan lukuja 9, 99, 999, 9999, jne. Onko näiden lukujen joukossa sellaista, joka on jaollinen luvulla 71?

9. Olkoon n positiivinen kokonaisluku ja p alkuluku. Osoita, että $n | \varphi(p^n - 1)$.
(Vihje: Etsi sellainen luku a , jolle $\text{syta}(a, p^n - 1) = 1$. Käytä Eulerin lausetta. Lisäksi luku $\varphi(p^n - 1)$ kannattaa esittää jakoyhtälön avulla, kun jakajana on n .)