ALGEBRA I

Harjoitus 6, kevät 2010

1. Tutki, onko operaatio $(*)$ binäärinen operaatio seuraavissa tapauksissa
   a) $a * b = \frac{a+b}{3}$ joukossa $\mathbb{Z}$,
   b) $a * b = a + \frac{ab}{7}$ joukossa $\mathbb{Q}$.

2. Merkitään $2\mathbb{Z} = \{2n | n \in \mathbb{Z}\}$. Osoita, että $(2\mathbb{Z}, +)$ on ryhmä.

3. Merkitään $S = \{2n + 1 | n \in \mathbb{Z}\} \cup \{0\}$. Onko $(S, +)$ ryhmä?

4. Osoita, että $(\mathbb{Z}, *)$ on ryhmä, kun $(*)$ määritellään seuraavasti:
   $a * b = a + b - 1$. Onko $(\mathbb{Z}, *)$ Abelin ryhmä?

5. Olkoon $S = \{x | x \in \mathbb{Q},\ x \neq 0,\ x \neq 1\}$. Olkoot funktiot $f_1(x) = x$, $f_2(x) = \frac{1}{1-x}$ ja $f_3(x) = \frac{x-1}{x}$, jotka ovat määritelty joukossa S. Merkitään $G = \{f_1(x), f_2(x), f_3(x)\}$. Osoita, että $(G, \circ)$ on ryhmä, missä $(\circ)$ on funktioiden yhdistämisoperaatio eli $f_i(x) \circ f_j(x) = f_i(f_j(x))$ kaikilla $x \in S$.

6. Olkoon $M = \{A | A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},\quad a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ja $detA \neq 0\}$. Osoita, että $(M, \cdot)$ on ryhmä, missä $(\cdot)$ on matriisien kertolasku. (Käytä Lineaarialgebrasta tuttuja matriisien laskusääntöjä hyväksi todistamisessa.) Onko $(M, \cdot)$ Abelin ryhmä?

7. Olkoon G ryhmä ja e sen neutraalialkio. Oletetaan lisäksi, että
   $g^2 = e$ aina, kun $g \in G$. Osoita, että G on Abelin ryhmä.

8. Olkoon G ryhmä ja $(xy)^3 = x^3y^3$ sekä $(xy)^5 = x^5y^5$aina, kun $x, y \in G$. Osoita, että G on Abelin ryhmä.