

ALGEBRA I

Harjoitus 7, kevät 2010

1. Kirjoita ryhmän

a) $(\mathbb{Z}_7, +)$, b) (\mathbb{Z}_9^*, \cdot) , c) $(\mathbb{Z}_{12}^*, \cdot)$ ryhmätaulu.

Määrää lisäksi jokaiselle alkioille sen käänteisalkio.

2. Kuinka monta alkioita on ryhmässä \mathbb{Z}_{980}^* ? Totea, että [39] on ryhmän \mathbb{Z}_{980}^* alkio. Määrää alkion [39] käänteisalkio ko. ryhmässä.

3. Ratkaise ryhmässä \mathbb{Z}_8 yhtälöpari

$$\begin{cases} x^2[4]y^2 = [0] \\ x[2]y = [4] \end{cases}.$$

4. Olkoon G ryhmä ja $|G| = 2r$, missä $r \geq 1$. Osoita, että ryhmässä G on kertalukua kaksi oleva alkio. (Siis $x \in G$, $x \neq e$ ja $x^2 = e$.)

5. Olkoot a ja x ryhmän G alkioita ja $x^2 = 1$ sekä $axa = a^3$. Osoita, että $a^8 = 1$.

6. Osoita, että $(p-1)! \equiv -1(p)$ aina, kun p on alkuluku ($p \in \mathbb{P}$).