ALGEBRA I

Harjoitus 8, kevät 2010

1. Tarkastellaan ryhmää $(\mathbb{Z}_8, +)$. Mitkä seuraavista ovat sen aliryhmiä?
   a) $H_1 = \{[0], [2], [4], [6]\}$,
   b) $H_2 = \{[0], [3], [6]\}$,
   c) $H_3 = \{[0], [4]\}$.

2. Kirjoita ryhmän $(\mathbb{Z}_{14}^*, \cdot)$ ryhmätaulu. Onko $H = \{[1], [5], [11]\}$ ryhmän $\mathbb{Z}_{14}^*$ aliryhmä ? Perustele vastauksesi.

3. Osoita, että $H = \{[1], [9], [11]\}$ on ryhmän $(\mathbb{Z}_{14}^*, \cdot)$ aliryhmä. Määrää aliryhmän H vasemmat ja oikeat sivuluokat.

4. Jos ryhmän kertaluku on 36, niin mitä voit sanoa aliryhmien kertaluvuista?

5. Olkoon G ryhmä sekä H ja K ryhmän G aliryhmiä. Osoita, että $H \cap K$ on ryhmän G aliryhmä. Onko $H \cap K$ ryhmien H ja K aliryhmä?

6. Olkoon G ryhmä, $K \leq G$ ja $H \leq G$. Tiedetään, että $|K| = 40$ ja $|H| = 33$. Mitä voit sanoa aliryhmän $H \cap K$ kertaluvusta ja alkioista?

7. Olkoon G ryhmä. Olkoot $H \leq G$ ja $N(H) = \{a \in G | aH = Ha\}$. Osoita, että $N(H) \leq G$.

8. Olkoon G Abelin ryhmä. Olkoot $H \leq G$ ja $K \leq G$. Merkitään $HK = \{ab | a \in H; b \in K\}$. Osoita, että $HK \leq G$.

9. Olkoon $\alpha, \beta, \gamma \in S_4$,
   $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ ja $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.
   a)Määrää $\alpha \circ \beta$, $\beta \circ \alpha$, $\alpha \circ \gamma$ ja $\gamma \circ \alpha$.
   b) Määrää käänteisalkiot α^{-1}, β^{-1} ja γ^{-1}.
   c) Ratkaise yhtälö $\alpha \circ x = \gamma$.