

## ALGEBRA I

Harjoitus 9, kevät 2010

1. Tutki ovatko seuraavat ryhmät syklisiä.  
a)  $(\mathbb{Z}_{18}^*, \cdot)$ ,    b)  $(\mathbb{Z}_{12}^*, \cdot)$ .
2. Osoita, että  $(\mathbb{Z}, +)$  on syklinen ryhmä.
3. a) Onko ryhmä  $(\mathbb{Z}_{15}^*, \cdot)$  syklinen?  
b) Määrää ryhmän  $(\mathbb{Z}_{15}^*, \cdot)$  kaikki aliryhmät.
4. Määrää kertalukua 6 olevan syklisen ryhmän  $G = \langle a \rangle$  kaikki aliryhmät.
5. Olkoon  $\alpha, \beta, \gamma \in S_4$ ,  
$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$
 ja  $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ .  
Määrää ryhmien  $\langle \alpha \rangle$ ,  $\langle \beta \rangle$  ja  $\langle \gamma \rangle$  kertaluvut.
6. Olkoon  $G$  ryhmä. Olkoot  $H \leq G$  ja  $N(H) = \{a \in G \mid aH = Ha\}$ . Aikaisemmin on osoitettu, että  $N(H) \leq G$ . Osoita, että  $H \trianglelefteq N(H)$ .
7. Olkoon  $G$  ryhmä ja  $M \trianglelefteq G$  sekä  $N \trianglelefteq G$ . Osoita, että  $M \cap N \trianglelefteq G$ .
8. Olkoon  $n$  positiivinen kokonaisluku ja  $p$  alkuluku. Osoita, että  $n \mid \varphi(p^n - 1)$ .  
Tee todistus tarkastelemalla ryhmää  $\mathbb{Z}_{p^n - 1}^*$  ja sen aliryhmiä.