Kompleksianalyysi II

Harjoitus 3, kevät 2010

1. Olkoon f koko tasossa $\mathbb{C}$ analyyttinen funktio, jolle

$$|f(z)| \leq \left|\frac{z+1}{z-1}\right|$$

aina kun $z \in \mathbb{C}$. Osoita, että f on vakiofunktio.

2. Olkoon f analyyttinen alueessa A. Osoita, että ehdosta $|f(z)| = a =$ vakio, $z \in A$ seuraa, että $f(z)$ on vakiofunktio A:ssa.

3. Olkoon f analyyttinen kiekossa $D_R(0)$. Oletetaan, että f ei ole vakiofunktio. Määritellään funktio g ehdolla

$$g(r) = \max_{z \in D_r(0)} |f(z)|, \quad 0 < r < R.$$

Osoita, että $g(r_1) < g(r_2)$, kun $0 < r_1 < r_2 < R$.

4. Olkoon f alueessa A analyyttinen funktio, jolla $|f|$:lla on lokaali minimikohta pisteessä $z_0 \in A$ ja $|f(z_0)| > 0$. Osoita, että f on vakiofunktio A:ssa.

5. Oletetaan, että funktiot $f_n, n = 1, 2, 3, \cdots$, ovat jatkuvia joukossa $E \subset \mathbb{C}$. Oletetaan, että $f_n \to f$ tasaisesti E:ssä. Osoita, että f on jatkuva E:ssä.

6. Tutki funktiojonon $f_n, n = 1, 2, 3, \cdots$, suppenemista joukossa $E \subset \mathbb{C}$, kun
   a) $f_n(z) = \dfrac{nz}{z+n}, E = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$,
   b) $f_n(z) = \dfrac{nz}{nz+1}, E = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1\}$.

7. Tutki seuraavien sarjojen suppenemista
   a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+|z|}$, b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+|z|}$, c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+z}$.