KOMPLEKSIANALYYSI II

Harjoitus 4, kevät 2010

1. Määrää seuraavien sarjojen suppenemissäteet ja suppenemiskiekot
   a) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k+1} z^k$, b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}(z-1)^k$, c) $\sum_{k=0}^{\infty} k^2 z^k$, d) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^3}{3^k} z^k$.

2. Määrää sarjan $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}i}\right)^{k+1} (z-\frac{1}{2}i)^k$ suppenemissäde. Määrää myös sarjan summa.

3. Tunntetusti $\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z}$, kun $|z| < 1$. Määrää funktio $f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} kz^k$, kun $|z| < 1$.

4. Määrää funktion $f(z) = e^z - 1 - \sin z$ nollakohdan $z = 0$ kertaluku.

5. Jatka funktio f analyyttisesti mahdollisimman laajaan alueeseen, kun
$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} kz^{k-1}.$$

6. Lausu funktio $f(z) = \sin z$, Taylor-sarjana pisteessä $z = \frac{\pi}{4}$.

7. Olkoon $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{2^{k+1}}$ ja $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z-i)^k}{(2-i)^{k+1}}$. Osoita, että g on f:n analyyttinen jatke.