

## Matematiikan perusteet taloustieteilijöille II

### Harjoituksia kevät 2010

1. Olkoon  $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  ja  $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 6 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

Määää

a)  $A + B$

b)  $AB$

c)  $BA$

d)  $A^2$

e)  $A^T$

f)  $A^T - B$

g)  $3A$

2. Laske seuraavat determinantit

(a)  $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$

(b)  $\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & -3 & 7 \end{vmatrix}$

(c)  $\begin{vmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 6 & -3 & -2 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

(d)  $\begin{vmatrix} 3 & -2 & -5 & 4 \\ -5 & 2 & 8 & -5 \\ -2 & 4 & 7 & -3 \\ 2 & -3 & -5 & 8 \end{vmatrix}$

(e)  $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 6 & 7 \end{vmatrix}$

(f)  $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 7 \\ 5 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

Vast: a) 23, b) 21, c) 100, d) -54, e) 0, f)  $\bar{A}$

3. Mikäli mahdollista määritä  $A^{-1}$ , kun

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

a) Yhtälöstä  $A \cdot A^{-1} = I_2$

b) Kofaktorien avulla

c) Gaussin eliminoimismenetelmällä.

Tarkista kertomalla!

4. Olkoon  $A = \begin{pmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

Määritä  $A^{-1}$  mikäli mahdollista

- a) Kofaktorien avulla  
 b) Gaussin eliminoimismenetelmällä

Tarkista kertomalla!

5. Ratkaise yhtälöryhmä

$$\begin{cases} -11x + 2y + 2z & = 1 \\ -4x + z & = 2 \\ 6x - y - z & = 3 \end{cases}$$

- a) Käänteismatriisin avulla, mikäli mahdollista  
 b) Cramerin säännöllä, mikäli mahdollista  
 c) Gaussin eliminoimismenetelmällä

Vast:  $x = 7, \quad y = 9, \quad z = 30.$

6. Ratkaise lineaariset yhtälöryhmät (Gaussin eliminoimismenetelmä)

$$\begin{array}{l} \text{a) } \begin{cases} 2x + 3y - 2z & = 5 \\ x - 2y + 3z & = 2 \\ 4x - y + 4z & = 1 \end{cases} \\ \text{b) } \begin{cases} x + 2y - z + 3w & = 3 \\ 2x + 4y + 4z + 3w & = 9 \\ 3x + 6y - z + 8w & = 10 \end{cases} \\ \text{c) } \begin{cases} 3x + 4y - 3z & = -3 \\ 2x + 3y + 2z & = 5 \\ x + y + z & = 4 \\ 2x + 2y + 2z & = 5 \end{cases} \\ \text{d) } \begin{cases} 3x + 4y - 3z & = -3 \\ 2x + 3y + 2z & = 5 \\ x + y + z & = 4 \\ 3x + 4y + 3z & = 9 \end{cases} \end{array}$$

Vast:

- a) ei ratkaisua  
 b)  $z = \frac{1}{5}(6 - x - 2y), \quad w = 2z - 1, \quad x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$   
 c) ei ratkaisua  
 d)  $x = 5, \quad y = -3, \quad z = 2$

7. Tutki ovatko seuraavat vektorit lineaarisesti riippumattomia

a)  $x_1 = (1, 1, 2)$   
 $x_2 = (4, 5, 5)$   
 $x_3 = (5, 8, 1)$

$$\begin{aligned}
 b) \quad x_1 &= (1, 1, 2) \\
 x_2 &= (4, 5, 5) \\
 x_3 &= (-1, -2, 2)
 \end{aligned}$$

Vast: a) ei      b) kyllä

8. Tutki seuraavien matriisien astetta

$$a) \begin{pmatrix} 3 & 4 & -3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$b) \begin{pmatrix} 3 & 4 & -3 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$c) \begin{pmatrix} 3 & 4 & -3 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -5 & -1 \\ 6 & 8 & -6 & 2 \end{pmatrix}$$

Vast: a) 3    b) 3    c) 2

9. Etsi seuraavan matriisin ominaisarvot ja ominaisvektorit

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Vast:  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 5$

$$\bar{X}_1 = \begin{pmatrix} x \\ -2x \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{X}_2 = \begin{pmatrix} \frac{-10}{3}x \\ 3x \\ x \end{pmatrix}, \quad \bar{X}_3 = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

10. Määritä funktion  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + 7z^2 - xy$  paikalliset ääriarvokohdat ja niiden laatu. Onko kyseessä absoluuttinen ääriarvo?

Vast:  $(0, 0, 0)$ , abs. minimi

11. Määritä funktion  $f(x, y, z) = -x^2 - 2y^2 - z^2 + xy + z$  ääriarvot ehdolla  $x + y + z = 35$ .

**Vast:**  $(15, 9, 11)$ ,  $f(15, 9, 11) = -362$ , abs. max.

Paljonko arvioit maksimiarvon olevan jos ehtona on

$$x + y + z = 36 \quad \text{tai} \quad x + y + z = 34.$$

Vast: -383, -341

12. Määritä funktion  $x^2 + 2y - 2x - 10z - 3$  ääriarvot ehdoilla  $2x + 2y + 2z = 0$  ja  $x = -2y - 3z$ .

Vast: (8, -16, 8) sidottu abs. minimi.

13. a) Määritä funktion  $f(x, y, z) = -x^2 - 2y^2 - z^2 + xy + z$  ääriarvot ehdolla  $x + y + z \leq 35$ .

b) Määritä funktion  $f(x, y, z) = -x^2 - 2y^2 - z^2 + xy + z$  ääriarvot ehdolla  $x + y + z \geq 35$ .

Vast: Max  $(0, 0, \frac{1}{2})$ .

14. Määritä funktion  $f(x, y, z) = xy + xz + yz$  ääriarvot

ehdolla  $xyz \geq 125$ .

Vast: Ei max, ei min.

15. Kahden teollisuudenalan 1 ja 2 taloutta kuvaa taulukko (luvut miljoonia markkoja)

Tuottaja	kokonaistuotanto	käyttäjä		loppukysyntä
		1	2	
1	300	100	100	100
2	600	200	0	400

Määrää teollisuudenalojen kokonaistuotannot, kun teollisuuden 1 lopputuotekysyntä on 100 ja teollisuuden 2 lopputuotekysyntä on 200.

Vast:  $\bar{x} = \begin{pmatrix} 240 \\ 360 \end{pmatrix}$ .

16. Olkoon otoksen havaintoaineisto seuraava:

$$\begin{array}{ccc} y & x_1 & x_2 \\ \hline 4 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{array}$$

Määrää pienimmän neliösumman estimaatti regressioyhtälölle  $y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2$ .

Vast:  $\beta_0 = 4/5$ ,  $\beta_1 = -2/5$  ja  $\beta_2 = 9/5$ .

17. Etsi ääriarvot funktiolle  $f(x, y) = 45x + 55y$  rajoitteilla

$$\begin{aligned} 6x + 4y &\leq 120, \\ 3x + 10y &\leq 180 \text{ ja} \\ x, y &\geq 0. \end{aligned}$$

Huom: Käytä ratkaisumonikulmiota.

18. Maksimoi funktio  $f(x, y) = 45x + 55y$  rajoitteilla

$$\begin{aligned} 6x + 4y &\leq 120, \\ 3x + 10y &\leq 180 \text{ ja} \\ x, y &\geq 0. \end{aligned}$$

Vast: (10,15) maksimiarvo 1275.

Huom: Käytä Kantaratkaisu -menetelmää.

19. Etsi ääriarvot funktiolle  $f(x, y) = 45x + 55y$  rajoitteilla

$$\begin{aligned} 6x + 4y &\geq 120, \\ 3x + 10y &\geq 180 \text{ ja} \\ x, y &\geq 0. \end{aligned}$$

Huom: Käytä ratkaisumonikulmiota.

20. Maksimoi funktio  $f(x_1, x_2) = 2x_1 + 10x_2$  rajoitteilla

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\leq 6, \\ 5x_1 + 4x_2 &\geq 20 \text{ ja} \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Vast: (0, 6) maksimiarvo 60.

Huom: Käytä Simplex -menetelmää.

21. Integroi

a)  $\int x^2|x|dx$       b)  $\int \frac{dx}{1+e^x}$       c)  $\int \frac{\ln x}{x}dx.$

22. Integroi

a)  $\int (x^2 - \sqrt{x} + 2)dx$       b)  $\int \sqrt{2+5x}dx$   
c)  $\int \frac{dx}{(3x+2)^2}$       d)  $\int \frac{x^3-1}{x-1}dx.$

23. Integroi

a)  $\int x^2|x|dx$       b)  $\int \frac{dx}{1+e^x}$       c)  $\int \frac{\ln x}{x}dx.$

24. Integroi

a)  $\int (x^2 - \sqrt{x} + 2)dx$       b)  $\int \sqrt{2+5x}dx$   
c)  $\int \frac{dx}{(3x+2)^2}$       d)  $\int \frac{x^3-1}{x-1}dx.$

25. Integroi

a)  $\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{x^2+2x+2}}dx$       b)  $\int xe^{x^2}dx.$   
c)  $\int \frac{x}{x^2 \ln x^2}dx$       d)  $\int 2^{x^2+1}x dx$       e)  $\int \frac{x+1}{2x^2+4x+5}dx.$

26. Laske osittaisintegroinnilla

a)  $\int xe^{-x}dx$       b)  $\int x^7 \ln x dx$   
c)  $\int x(-x+2)^5dx$       d)  $\int (\ln x \cdot \frac{1}{x}) dx.$

27. Laske osamurtokehittelmän avulla

$$\text{a) } \int \frac{x^2}{x^3 - 3x^2 + 3x - 1} dx \quad \text{b) } \int \frac{dx}{x^5 + 2x^3 + x}.$$

28. Integroi sopivalla sijoituksella

$$\begin{aligned} \text{a) } & \int \frac{dx}{1 + \sqrt[3]{x+3}}. & \text{b) } & \int \frac{dx}{x\sqrt{2x-x^2}} \\ \text{c) } & \int \frac{x^2 dx}{(1+2x)^{3/2}} & \text{d) } & \int \frac{x^{1/2} + x^{1/6}}{x^{3/4}} dx. \end{aligned}$$

29. Määritä integraalit

$$\text{a) } \int_{-2}^2 x(x-1)^2 dx \quad \text{b) } \int_0^3 x|x-2| dx.$$

Vast: a)  $32/3$     b)  $8/3$ .

30. Laske käyrien  $y = \sqrt{1-x}$  ja  $y = \sqrt{x-2}$  sekä suorien  $y = 1$  ja  $y = 2$  rajoittaman alueen pinta-ala.

Vast:  $17/3$ .

HUOM! Suorita tehtävä sekä  $x$ -akselin että  $y$ -akselin suhteen tarkasteltuna.

31. Laske käyrän  $y^2 = 2x + 1$  ja suoran  $x - y - 1 = 0$  rajoittaman alueen pinta-ala.

Vast:  $16/3$ .

HUOM! Suorita tehtävä sekä  $x$ -akselin että  $y$ -akselin suhteen tarkasteltuna.

32. Laske integraali  $\int_0^1 x(1-x)^3 dx$

a) osittaisintegroinnilla      b) sijoituksella.

Vast:  $1/20$ .

33. Laske Taylorin sarjakehitelmän avulla

$$\int_0^2 e^{x^2} dx.$$

Huom: Käytä tarkkuutta  $k = 3$ .

Vast:  $4e$ .

34. Laske Puolisuunnikassäännön avulla

$$\int_0^2 e^{x^2} dx.$$

Huom: Käytä tarkkuutta  $n = 4$ .

35. a) Olkoon kompleksiluvut  $a = 1 + 2i$  ja  $b = 1 - 3i$ .

Määrä  $\bar{a}$ ,  $a + b$ ,  $a \cdot b$ ,  $a/b$  ja  $|b|$ .

b) Ratkaise yhtälö  $2x^3 - 2x^2 + 18x - 18 = 0$ , kun  $x \in \mathbb{C}$ .

36. Integroi / derivoi

a)  $\int_0^{\pi/2} \cos 3x \, dx$ ,      b)  $\int \tan x \, dx$ ,      c)  $\int \sin^2 x \, dx$ ,

d)  $D \cos 3x$ ,      e)  $D \tan 2x$ ,      f)  $D \sin^2 2x$ .

(käytä kaavoja)

37. Ratkaise differentiaaliyhtälö

$$\frac{dy}{dx} + 2y = \sin 2x.$$

38. Ratkaise differentiaaliyhtälö

$$\frac{dy}{dx} + 2y = x^2 + e^x.$$



39. Ratkaise differentiaaliyhtälö (käytä 2. tapaa)

$$\frac{dy}{dx} + 2xy = 2xe^{-x^2}.$$

40. Ratkaise differentiaaliyhtälö

$$(x + y)dx + (x - y)dy = 0$$

alkuehdolla  $y(0) = 0$ .

Käsittele sekä homogeenisena että eksaktina differentiaaliyhtälönä.

41. Ratkaise differentiaaliyhtälö

$$y'' - y = e^x.$$

42. Ratkaise differenssiyhtälö

$$\Delta y_t = 5 - 5y_t$$

alkuehdolla  $y_0 = 2$ .

43. Ratkaise differenssiyhtälö

$$y_{t+2} - 4y_t = 5$$

alkuehdolla  $y_0 = 1/3$  ja  $y_1 = -5/3$ .

44. Ratkaise differenssiyhtälö

$$\Delta^2 y_t = 5 - 2y_{t+1} + 5y_t$$

alkuehdolla  $y_0 = 1/3$  ja  $y_1 = -5/3$ .

45. Ratkaise differenssiyhtälö

$$\Delta y_t = 5 - 5y_t$$

alkuehdolla  $y_0 = 2$ .

46. Ratkaise differenssiyhtälö

$$y_{t+2} - 4y_t = 5$$

alkuehdolla  $y_0 = 1/3$  ja  $y_1 = -5/3$ .

47. Ratkaise differenssiyhtälö

$$\Delta^2 y_t = 5 - 2y_{t+1} + 5y_t$$

alkuehdolla  $y_0 = 1/3$  ja  $y_1 = -5/3$ .