

806109 TILASTOTIETEEN PERUSMENETELMÄT I  
Harjoitus 1, viikko 3, kevät 2010

(Muut kuin taloustieteiden tiedekunnan opiskelijat)

Summaoperaattorin  $\Sigma$  käytöstä

Monien tilastollisten tunnuslukujen laskukaavoissa esiintyy mittaustulosten summia. Jotta välttyttäisiin pitkien summalausekkeiden kirjoittamiselta kaavoissa, on otettu käyttöön summaoperaattori  $\Sigma$  (iso sigma), joka määritellään seuraavasti:

$$\sum_{i=1}^n x_i = x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} + x_n \quad .$$

Jos  $x_1 = \dots = x_n = c =$  vakio, on siis

$$\sum_{i=1}^n c = c + c + \dots + c = n \cdot c \quad .$$

Esimerkkejä:

$$\sum_{i=1}^5 x_i = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$$

$$\sum_{i=5}^8 y_i = y_5 + y_6 + y_7 + y_8$$

$$\sum_{i=1}^5 3 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 5 \cdot 3 = 15$$

$$\sum_{i=4}^6 10 = 10 + 10 + 10 = 3 \cdot 10 = 30$$

$$\sum_{j=1}^3 j = 1 + 2 + 3 = 6$$

$$\sum_{k=1}^4 k \cdot x_k = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4$$

Merkinnällä  $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij}$  tarkoitetaan summaa  $x_{11} + x_{12} + \dots + x_{1n} + x_{21} + x_{22} + \dots + x_{2n} + x_{m1} + x_{m2} + \dots + x_{mn}$

Tulo-operaattorin  $\Pi$  (iso pii) käytöstä:

Mikäli kaavoissa esiintyy mittaustulosten tuloja, voidaan kaavoja lyhentää ja selkeyttää vastaavan tulo-operaattorin  $\Pi$  (iso pii) avulla. Operaattori määritellään seuraavasti:

$$\prod_{i=1}^n x_i = x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n.$$

1. Olkoon  $x_1 = 7, x_2 = 4, x_3 = 9, x_4 = 5$  ja  $x_5 = 3$  sekä  $y_1 = -3, y_2 = 0, y_3 = -4, y_4 = 6$  ja  $y_5 = 6$ .

Laske seuraavien summien arvot.

a)  $\sum_{i=1}^5 x_i$     b)  $\sum_{i=1}^5 x_i^2$     c)  $(\sum_{i=1}^5 x_i)^2$     d)  $\sum_{i=1}^5 x_i y_i$     e)  $(\sum_{i=1}^5 x_i)(\sum_{i=1}^5 y_i)$

f)  $\sum_{i=1}^5 (x_i + y_i)$     g)  $\sum_{i=1}^5 (i - 5)x_i$     h)  $\sum_{i=1}^5 x_i(y_i - 3)$

i)  $\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$ , missä  $\bar{x}$  ja  $\bar{y}$  ovat  $x$ :n ja  $y$ :n keskiarvot,  $\bar{x} = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 x_i$  ja  $\bar{y} = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 y_i$

2. Esitä  $\Sigma$ -merkkiä käyttäen

a)  $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$     b)  $(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2$     c)  $x_1 x_2 + x_2 x_3 + \dots + x_{n-1} x_n$

d)  $(x_1 - a) + (x_2 - 4a) + (x_3 - 9a) + (x_4 - 16a)$ ,  $a$  mielivaltainen reaalivakio

e)  $\frac{f_1 x_1 + f_2 x_2 + \dots + f_r x_r}{f_1 + f_2 + \dots + f_r}$

3. Todista seuraavat summaoperaattorin ominaisuudet ( $a, b$  ja  $c$  mielivaltaisia reaalivakioita).

a)  $\sum_{i=1}^n c x_i = c \sum_{i=1}^n x_i$     b)  $\sum_{i=1}^n (a x_i + b y_i + c) = a \sum_{i=1}^n x_i + b \sum_{i=1}^n y_i + n c$

c)  $\sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{i=1}^n y_i^2 + 2 \sum_{i=1}^n x_i y_i$ .

4. Kahden muuttujan ( $x$  ja  $y$ ) arvoista kuudella havaintoyksiköllä on saatu seuraavat summat:

$$\sum_{i=1}^6 x_i = 24, \quad \sum_{i=1}^6 x_i^2 = 118, \quad \sum_{i=1}^6 x_i y_i = 16, \quad \sum_{i=1}^6 y_i = 6 \quad \text{ja} \quad \sum_{i=1}^6 y_i^2 = 64.$$

Käytä hyväksi tehtävässä 3 todistettuja summaoperaattorin ominaisuuksia ja laske

a)  $\sum_{i=1}^6 3x_i$     b)  $\sum_{i=1}^6 (2x_i - 5)$     c)  $\sum_{i=1}^6 (x_i + y_i)$     d)  $\sum_{i=1}^6 (x_i - y_i)^2$

e)  $\sum_{i=1}^6 (y_i - \bar{y})$     f)  $\sum_{i=1}^6 (y_i - \bar{y})^2$     g)  $\sum_{i=1}^6 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$

5. Esitä summana  $\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^2 \frac{(f_{ij} - e_{ij})^2}{e_{ij}}$ .

6. a) Esitä  $\Pi$ -merkkiä käyttäen  $4x_1 \cdot 4x_2 \cdot \dots \cdot 4x_n$ .    b) Laske  $\prod_{i=1}^4 3^i$ .

Vastauksia tehtäviin:

1: a) 28    b) 180    c) 784    d) -9    e) 140    f) 33    g) -63    h) -93    i) -37

4: a) 72    b) 18    c) 30    d) 150    e) 0    f) 58    g) -8

6: b) 59049