KOMPLEKSIANALYYSI I

Harjoitus 2, kevät 2011

1. Osoita, että $|z_1 - z_2| = |1 - \bar{z}_1 z_2|$, kun $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ ja $|z_1| = 1$ tai $|z_2| = 1$.

2. Olkoot $a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$ ja $a_0 > a_1 > a_2 > \cdots > a_n > 0$. Olkoon $p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n, z \in \mathbb{C}$. Oletetaan, että $p(z_0) = 0$. Osoita, että $|z_0| > 1$.

3. Määrää luvun $z \in \mathbb{C}$ napakoordinaatit, kun

   a) $z = -3i$, b) $z = \sqrt{3} - i$, c) $z = 2 - i\sqrt{12}$.

4. Laske $(1 - i\sqrt{3})^{15}$ ja $(1 + i)^{11}$ ja $\dfrac{(1+i)^5}{(1 - i\sqrt{3})^7}$.

5. Olkoon $z \in \mathbb{C}, |z| = 1, z \neq -1$. Osoita, että z voidaan esittää muodossa $z = \dfrac{1 + it}{1 - it}$ jollain $t \in \mathbb{R}$.

6. Ratkaise yhtälöt

   a) $z^4 = -1$, b) $z^6 = 1$, c) $z^3 = -i$.