

# KOMPLEKSIANALYYSI I

## Harjoitus 3, kevät 2011

- Osoita, että joukko  $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| > r\}$  on avoin ( $z_0 \in \mathbb{C}, r > 0$  annettuja).
- Olkoon  $A = \{i, \frac{i}{2}, \frac{i}{3}, \dots\} \subset \mathbb{C}$ . Tutki onko  $A$  rajoitettu, suljettu, avoin. Määrä  $A^0, A'$  ja  $cl(A)$ .
- Määrä pisteiden  $1 + i$  ja  $-3 + 2i$  kautta kulkevan suoran yhtälö
  - parametrimuodossa,
  - muodossa  $ax + by = d$ ,  $a, b, d \in \mathbb{R}$ ,
  - muodossa  $\bar{a}z + \alpha\bar{z} = \gamma$ ,  $\alpha \in \mathbb{C}$  ja  $\gamma \in \mathbb{R}$ . Määrä myös y.o. pisteiden välisen janan yhtälö.
- Määrä seuraavat raja-arvot (mikäli ovat olemassa)
  - $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{i^n}{n}$ ,
  - $\lim_{n \rightarrow \infty} i^n$ ,
  - $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1+i)^n}{n}$ ,
  - $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n - in^2}{(1+i)n - 1}$ .
- Olkoon  $(a_n)$  jono  $\mathbb{C}$ :ssä, jolle  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  on olemassa. Osoita, että joukko  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  on rajoitettu.
- Osoita, että  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = e^x(\cos y + i \sin y)$ , kun  $z = x + iy \in \mathbb{C}$ .