KOMPLEKSIANALYYSI I

Harjoitus 4, kevät 2011

1. Olkoon jono $(z_n) \subset \mathbb{C}$ määritelty ehdoilla $z_0 = 3$ ja $z_{n+1} = \frac{1}{3}z_n + 2i$. Osoita, että jono (z_n) suppenee ja määrää sen raja-arvo.

2. Tutki mitkä seuraavista funktioista ovat bijektioita $\mathcal{M}(f) \to \mathcal{A}(f)$ ja määrää $f^{-1} : \mathcal{A}(f) \to \mathcal{M}(f)$ mikäli mahdollista.

   a) $f(z) = \bar{z} + i,\ z \in \mathbb{C}$,

   b) $f(z) = \frac{1}{z},\ z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$,

   c) $f(z) = z^2 + i,\ z \in \mathbb{C}$,

   d) $f(z) = z^2 + i,\ z \in S[0, \pi)$.

3. Olkoon $f : S[0, \frac{2\pi}{3}) \to \mathbb{C}$ funktio, jolle $f(z) = z^3 + i,\ z \in S[0, \frac{2\pi}{3})$. Tutki onko f bijektio $\mathcal{M}(f) \to \mathbb{C}$. Määrää $f^{-1}(1)$.

4. Määrää funktio $f(z) = f(x+iy)$ muodossa $f(z) = u(x,y)+iv(x,y), z \in \mathcal{M}(f)$, kun

   a) $f(z) = z^3, z \in \mathbb{C}$, b) $f(z) = \frac{1}{z^2}, z \neq 0$, c) $f(z) = e^{iz}, z \in \mathbb{C}$.

5. Osoita, että funktion raja-arvo $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = a$ (mikäli on olemassa) on yksikäsitteinen.

6. Tutki funktion $f(z)$ raja-arvon olemassaoloa pisteessä $z = 0$, kun

   a) $f(z) = \frac{Re z}{z}$, b) $f(z) = \frac{z}{|z|}$, c) $f(z) = \frac{z Re z}{|z|}$.