

# KOMPLEKSIANALYYSI I

Harjoitus 5, kevät 2011

1. Osoita jatkuvuuden määritelmän avulla, että funktio  $f(z) = z^2 + 2z, z \in \mathbb{C}$ , on jatkuva jokaisessa pisteessä  $z_0 \in \mathbb{C}$ .
2. Funktiolle  $f$  määritellään  $f(0) = 0$  ja
  - a)  $f(z) = \frac{z-\bar{z}}{|z|}$ ,
  - b)  $f(z) = \frac{(z+\bar{z})^2}{|z|}$ ,
  - c)  $\frac{\operatorname{Re}(z^2)}{|z^2|}$ , kun  $z \neq 0$ .Tutki onko  $f$  jatkuva pisteessä  $z = 0$ .
3. Olkoot  $f$  ja  $g$  jatkuvia joukossa  $A \subset \mathbb{C}$ . Osoita, että myös  $fg$  on jatkuva  $A$ :ssa.
4. Osoita, että funktio  $f(z) = z^2$  on tasaisesti jatkuva joukossa  $A = D_2(i)$ . Onko  $f$  tasaisesti jatkuva joukossa  $A = \mathbb{C}$ ?
5. Tutki funktion  $f(z) = \frac{1}{z}, z \neq 0$  tasaista jatkuvuutta
  - a) joukossa  $\frac{1}{2} < |z| < 1$ ,
  - b) joukossa  $|z| < 1, z \neq 0$ .
6. Tutki onko funktioilla
  - a)  $f(z) = \bar{z}^2$ ,
  - b)  $f(z) = z|z|, z \in \mathbb{C}$derivaattaa missään pisteessä  $z_0 \in \mathbb{C}$ .