KOMPLEKSIANALYYSI I

Harjoitus 7, kevät 2011

1. Osoita, että funktio
$$f(z) = \sin z$$
toteuttaa Cauchy-Riemannin yhtälön.

2. Olkoon f alueessa $A \subset \mathbb{C}$ analyyttinen funktio.
   a) Oletetaan, että $f'(z) = 0$ aina, kun $z \in A$.
      Osoita, että f on vakiofunktio A:ssa.
   b) Oletetaan, että $f = u + iv$ ja u on vakiofunktio A:ssa. Osoita, että f on vakio A:ssa. Tutki myös tapaus, missä $u^2 + v^2$ on vakio funktio A:ssa.

3. Määrää derivaatta $f'(z)$, kun

   a) $f(z) = \cos(z^2 + iz)$, b) $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$.

4. Määrää

   a) $\log(-4)$, b) $\log 3i$, c) i^{2i}, d) i^{-i}.

5. Ratkaise yhtälöt
   a) $e^z = 2 + i$, b) $\sin z = i$, c) $\cos z = 0$.

6. Laske raja-arvot

   a) $\displaystyle\lim_{z\to 0} \frac{e^{z^2} - 1}{z^2 + 2z}$, b) $\displaystyle\lim_{z\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos z}{z - \frac{\pi}{2}}$, c) $\displaystyle\lim_{z\to 0} \frac{\cos 2z - 1}{\sin^2 z}$.

7. Osoita, että $\sin \bar{z} = \overline{\sin z}$, $z \in \mathbb{C}$.