

KOMPLEKSIANALYYSI II

Harjoitus 1, Kevät 2011

1. Määrää

$$\int_{\gamma} \operatorname{Re} z dz \quad \text{ja} \quad \int_{\gamma} \operatorname{Im} z dz,$$

missä käyrä γ on

- jana pisteestä $1 + i$ pisteeseen $2 - i$.
- Kaari $|z| = 1$, $0 \leq \arg z \leq \pi$, alkupisteensä 1.
- a -keskinen, r -säteinen ympyrä, $a \in \mathbb{C}$, $r > 0$.

2. Laske $\int_{\gamma} |z|^2 dz$ ja $\int_{\gamma} |z|^2 |dz|$, missä γ on neliön $0 \rightarrow 1 \rightarrow 1 + i \rightarrow i \rightarrow 0$ piiri.

3. Olkoon $w \in \mathbb{C}$ ja funktio $f : \mathbb{C} \setminus \{w\} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = \frac{1}{z-w}$. Laske $\int_{\gamma} f(z) dz$, missä $\gamma = \{ w + re^{it} \mid t \in [0, 2\pi] \}$, $r > 0$. Onko funktiolla f integraalifunktiota?

4. Määrää seuraavien funktioiden integraalifunktiot:

- $f(z) = \sin z \cos z$
- $f(z) = \sin 2z \cos z$
- $f(z) = ze^{2z}$
- $f(z) = z^2 \sin z$

Laske myös $\int_{\gamma} e^z \sin z dz$, missä $\gamma = \{ 2\pi \cos t + it^5 e^{t^3} \sin t \mid t \in [0, \pi] \}$.

5. Olkoon γ paloittain säännöllinen käyrä ja funktio f jatkuva käyrällä γ . Osoita, että

$$\int_{-\gamma} f(z) dz = - \int_{\gamma} f(z) dz.$$

6. Osoita tehtävän 5 oletuksilla, että

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq \int_{\gamma} |f(z)| |dz|.$$

VIHJE: Aloita olettamalla ensin, että γ on säännöllinen ja valitsemalla sopiva vakio $c \in \mathbb{C}$ siten, että $\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| = \int_{\gamma} cf(z) dz$.