Kompleksianalyysi II

Harjoitus 2, Kevät 2011

1. Olkoon γ yksikköympyrä. Laske $\int_\gamma f(z)dz$, kun

   a) $f(z) = \frac{1}{z^2+2z+2}$, b) $f(z) = \tan z$

2. Laske
$$\int_\gamma \frac{1}{(z-z_0)^n} dz,\ n = 2, 3...$$
   missä γ on sellainen paloittain säännöllinen Jordan-käyrä, että
   a) $z_0 \in I(\gamma)$,
   b) $z_0 \in E(\gamma)$.

3. Osoita, että
$$\int_0^{2\pi} e^{\cos t} \cos(t + \sin t)dt = 0 \quad \text{ja} \quad \int_0^{2\pi} e^{\cos t} \sin(t + \sin t)dt = 0.$$

4. Laske
$$\int_\gamma \frac{1}{1+z^2} dz,$$
   missä γ on ympyrä, jonka
   a) keskipiste i, säde 1, b) keskipiste $-i$, säde 1, c) keskipiste 0, säde 2.
   Vihje: Osamurtokehitelmä.

5. Osoita, että Cauchy-Goursatin lemman todistuksessa konstruoidulla kolmioiden jonolla $\Delta, \Delta_1, \Delta_2, ..., \Delta_n, ...$ on seuraavat ominaisuudet:

   a) $\frac{|\partial\Delta_n|^2}{|\Delta_n|} = \frac{|\partial\Delta|^2}{|\Delta|}$ kaikilla $n \in \mathbb{Z}_+$.

   b) Jos kaikilla $n \in \mathbb{Z}_+$ valitaan kolmiosta Δ_n jokin piste z_n, niin jono (z_n) suppenee kohti jotain pistettä z_0.

   c) Jos $\delta > 0$ on annettu, niin on olemassa sellainen $N \in \mathbb{Z}_+$, että
$$\Delta_n \subset D_\delta(z_0) \quad \text{aina, kun } n \geqslant N.$$

   d) Leikkaus $\cap_{n=1}^\infty \Delta_n$ koostuu täsmälleen yhdestä pisteestä.