

# KOMPLEKSIANALYYSI II

## Harjoitus 3, Kevät 2011

1. Laske seuraavat käyräintegraalit:

- a)  $\int_{\gamma} \frac{\sin z}{z-i} dz$ , kun  $\gamma = \{2e^{it} \mid t \in [0, 2\pi]\}$ ,  
b)  $\int_{\gamma} \frac{\cosh z}{z-\pi i} dz$ , kun  $\gamma = \{4e^{2\pi it} \mid t \in [0, 1]\}$ ,  
c)  $\int_{\gamma} \frac{\cos z}{z-2\pi} dz$ , kun  $\gamma = \{3 + \pi e^{it^2} \mid t \in [0, \sqrt{2\pi}]\}$ .

2. Laske

$$\int_{\gamma} \frac{e^z}{z(z-2i)} dz,$$

missä

a)  $\gamma = \{e^{it} \mid t \in [0, 2\pi]\}$ ,   b)  $\gamma = \{3e^{it} \mid t \in [0, 2\pi]\}$ .

3. Laske

$$\int_0^{2\pi} e^{a \cos t} \cos(a \sin t) dt,$$

missä  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

4. Laske

a)  $\int_{\gamma} \frac{e^{az}}{z^2+1} dz$ ,   b)  $\int_{\gamma} \frac{e^{az}}{(z^2+1)^2} dz$ ,

missä  $\gamma = \{3e^{it} \mid t \in [0, 2\pi]\}$  ja  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

5. Laske

a)  $\int_{\gamma} \frac{e^{iz}}{z^3} dz$ ,   b)  $\int_{\gamma} \frac{\sin z}{z^{n+1}} dz$ ,

missä  $\gamma = \{2e^{it} \mid t \in [0, 2\pi]\}$  ja  $n \in \mathbb{N}$ .

6. Olkoon  $f$  analyyttinen funktio alueessa  $A$  ja  $D$  sellainen avoin kiekko, että  $cl(D) \subset A$ . Osoita, että kaikilla  $z \in D$ ,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{\partial D} \frac{f(w)}{(w-(z+h))^m (w-z)^n} dw = \int_{\partial D} \frac{f(w)}{(w-z)^{m+n}} dw$$

kaikilla  $m, n \in \mathbb{Z}_+$ .

Vihje: Vertaa lauseen 3.1.1 todistuksessa esiintyneeseen raja-arvoon. Huomaa myös, että koska  $|f|$  on jatkuva käyrällä  $\partial D$ , joka on joukkona suljettu ja rajoitettu (eli kompakti), niin on olemassa  $M > 0$  siten, että  $|f(w)| \leq M$  kaikilla  $w \in \partial D$ .