

KOMPLEKSIANALYYSI II

Harjoitus 4, Kevät 2011

1. Olkoon f koko tasossa \mathbb{C} analyyttinen funktio, jolle

$$|f(z)| \leq \left| \frac{1+z}{1-z} \right|.$$

Osoita, että f on vakiofunktio.

2. Olkoon γ kompleksitason paloittain säännöllinen käyrä. Olkoon lisäksi (f_n) sellainen jono käyrällä γ jatkuvia funktioita, että $f_n \rightarrow f$ tasaisesti, kun $n \rightarrow \infty$. Osoita, että

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\gamma} f_n(z) dz = \int_{\gamma} f(z) dz.$$

3. Tutki, suppeneeko funktiojono $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ joukossa $E \subset \mathbb{C}$, kun

a) $f_n(z) = \frac{nz}{z+n}$, $E = D_1(0)$,

b) $f_n(z) = \frac{nz}{nz+1}$, $E = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$,

c) $f_n(z) = \sum_{k=0}^n z^k$, $E = D_1(0)$.

Onko suppeneminen tasaista joukossa E ?

4. Tutki, suppenevatko seuraavat sarjat:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in}}{n^2}$, b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n+i)}{n^2}$ d) $\sum_{n=1}^{\infty} n \sin\left(\frac{i}{n}\right)$.

5. Tutki millä kompleksiluvun z arvoilla seuraavat sarjat suppenevat:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+|z|}$, b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+z}$, c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{1-z^n}$.

6. Määrää potenssisarjan

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}i} \right)^{n+1} \left(z - \frac{1}{2}i \right)^n$$

suppenemissäde ja summa.