Kompleksianalyysi II

Harjoitus 5, Kevät 2011

1. Määrää seuraavien potenssisarjojen suppenemissäteet ja suppenemiskiekot:

$$\text{a)}\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n+1} z^n, \quad \text{b)}\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}(z+1)^n, \quad \text{c)}\ \sum_{n=0}^{\infty} n^2 (z-\pi)^n, \quad \text{d)}\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3}{3^n}(z-e)^n.$$

2. Olkoon f jatkuva funktio alueessa A ja $D = D_R(z_0)$ ($R > 0$) sellainen avoin kiekko, että $cl(D) \subset A$. Osoita, että kaikilla $z \in D$ pätee

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\partial D} \frac{f(w)(z-z_0)^{n+1}}{(w-z)(w-z_0)^{n+1}} dw = 0.$$

   Vihje: Harjoitus 4, tehtävä 2.

3. Määrää seuraavien funktioiden Taylorin kehitelmät annetuissa pisteissä ja tutki, milloin ne suppenevat.

$$\text{a)}\ f(z) = e^z,\ z_0 = \pi, \qquad \text{b)}\ f(z) = \sin z,\ z_0 = 0,$$
$$\text{c)}\ f(z) = \frac{1}{az+b},\ z_0 = 0, \quad \text{d)}\ f(z) = \frac{z}{z^2-2z+5},\ z_0 = 1.$$

   ($a, b \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$).

4. Määrää funktioiden $\sin z$ ja $\cos z$ Taylorin kehitelmät pisteessä $\frac{\pi}{4}$.

5. Tutki, ovatko seuraavat derivaatat olemassa ja myönteisessä tapauksessa määrää ne:

$$\text{a)}\ f^{(9)}(2),\ \text{kun}\ f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(n \sin \frac{1}{3^n n}\right)^n (z-2)^n,$$
$$\text{b)}\ f^{(24)}(0),\ \text{kun}\ f(z) = \frac{z^{15}}{(3-z)^3}.$$

6. Osoita, että funktio $f(z) = \frac{z}{\sin z}$ on analyyttinen origossa ja määrää sen Taylorin kehitelmän kolmen ensimmäisen termin vakiokertoimet.