Kompleksianalyysi II

Harjoitus 6, Kevät 2011

1. Olkoon h analyyttinen funktio alueessa A. Oletetaan, että piste $a \in A$ on jokin joukon $E := \{w \in A \ : \ h(w) = 0\}$ kasaantumispiste. Luennolla on osoitettu, että tällöin on olemassa $r > 0$ siten, että $D_r(a) \subset E$.
   Olkoon sitten $z_0 \in A$ jokin joukon E kasaantumispiste ja $\gamma = \{\ \lambda(t) \ : \ t \in [0,1]\ \} \subset A$ jatkuva käyrä (siis funktio λ on jatkuva), jonka alkupiste on z_0. Asetetaan
   $$T := \{s \in [0,1] \ : \ \text{kaikilla } t \in [0,s] \text{ pätee } \lambda(t) \in E\}.$$
   Olkoon vielä $\tau := \sup T$. Osoita että
   i) $T \neq \varnothing$ ja jos $s \in T$ niin $\lambda(s)$ on joukon E kasaantumispiste.
   ii) $\tau \in T$
   iii) $\tau = 1$.
   Osoita tämän avulla, että jos joukolla E on kas.piste alueessa A, niin $h(z) = 0 \ \forall z \in A$.
   Vihje: Piirrä kuva!

2. Olkoon f analyyttinen funktio kiekossa $D_R(0)$, $R > 0$. Oletetaan lisäksi, että f ei ole vakiofunktio. Asetetaan funktio $g :]0, R[\to \mathbb{R}$,
   $$g(r) = \max_{z \in cl(D_r(0))} |f(z)|.$$
   Osoita, että g on aidosti kasvava funktio.

3. Olkoon f sellainen analyyttinen funktio alueessa A, että funktiolla $|f|$ on lokaali minimikohta pisteessä $z_0 \in A$ ja $|f(z_0)| > 0$. Osoita, että f on vakiofunktio.

4. Olkoon
   $$f(z) = \frac{\sum_{k=1}^{\infty} k(z-\pi)^{k-1}}{z}.$$
   Jatka funktio f analyyttisesti mahdollisimman laajaan alueeseen.

5. Olkoon
   $$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{2^{k+1}} \quad \text{ja} \quad g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z-i)^k}{(2-i)^{k+1}}.$$
   Osoita, että funktio g on funktion f analyyttinen jatke.

6. Tutki, milloin Laurent-sarja
   $$\sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^{-|n|}(z+1)^n$$
   suppenee ja laske sarjan summa.