

KOMPLEKSIANALYYSI II

Harjoitus 7, Kevät 2011

1. Määrää funktion

$$f(z) := \frac{1}{z(z+1)(z+2)}$$

Laurent-kehitemmä alueessa a) $0 < |z| < 1$, b) $1 < |z| < 2$, c) $|z| > 2$.

2. Määrää funktion f Laurent-kehitemmä alueessa $|z| > 0$, ja tutki, millainen erikoispiste 0 on ja laske residyt, kun

$$\text{a) } f(z) = \frac{1 - \cos z}{z}, \quad \text{b) } f(z) = \frac{e^{z^2}}{z^3}.$$

3. Määrää funktion f erikoispisteet ja niihin liittyvät residyt, kun

$$\text{a) } f(z) = \frac{2z+1}{z^2-z-2}, \quad \text{b) } f(z) = \frac{z^2+4}{z^3+2z^2+2z}, \quad \text{c) } f(z) = \frac{1}{\cos z}.$$

4. Laske

$$\text{a) } \int_{\partial D_2(0)} \frac{e^z}{z^3+z} dz \quad \text{b) } \int_{\partial D_r(0)} \frac{\sin z}{(z-a)(z-b)} dz,$$

missä $r > 0$ ja $|a|, |b| < r$.

5. Olkoon γ paloittain säännöllinen, positiivisesti suunnistettu Jordan-käyrä. Olkoon lisäksi f analyyttinen funktio alueessa, joka sisältää joukon $I(\gamma) \cup \gamma$. Osoita, että

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw \quad \text{kaikilla } z \in I(\gamma).$$