

# KOMPLEKSIANALYYSI II

## Kertaustehtäviä

1. Laske

a)  $\int_{\gamma} z^2 dz$ , missä  $\gamma$  on puoliympyrä pisteestä  $a$  pisteeseen  $-a$  ja  $a > 0$ ,

(ylemmässä puolitasossa)

b)  $\int_{\gamma} \sin z dz$ , missä  $\gamma$  on jana pisteestä  $0$  pisteeseen  $\pi i$ ,

c)  $\int_{\partial D_1(1)} \bar{z}^2 dz$ , d)  $\int_{\partial D_4(1)} \frac{e^{3z}}{z - \pi i} dz$ ,

e)  $\int_{\partial D_3(0)} \frac{\sin(\pi z^2) + \cos(\pi z^2)}{(z-1)(z-2)} dz$ , f)  $\int_{\partial D_2(0)} \frac{e^{2z}}{(z+1)^4} dz$

g)  $\int_{\partial D_1(0)} \frac{\sin^6 z}{(z - \frac{\pi}{6})^3} dz$ , h)  $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2(\frac{\pi}{6} + 2e^{i\theta}) d\theta$ .

Vs: a)  $-\frac{2a^3}{3}$ , b)  $1 - \cosh \pi$ , c)  $4\pi i$ , d)  $-2\pi i$ , e)  $4\pi i$ , f)  $\frac{8\pi i e^{-2}}{3}$ , g)  $\frac{21\pi i}{16}$ , h)  $\frac{1}{4}$ .

2. Määrää seuraavien potenssisarjojen suppenemiskiekot:

a)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+i)^n}{(n+1)(n+2)}$ , b)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2 \cdot 3^n} (z+1)^n$ , c)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} z^n$ , d)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{3^n + 1}$ .

Vs. a)  $D_1(-i)$ , b)  $D_3(-1)$ , c)  $\mathbb{C}$ , d)  $D_3(0)$ ,

3. Laske seuraavien sarjojen summat, kun  $|z| < 1$ :

a)  $\sum_{n=1}^{\infty} n z^n$ , b)  $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^n$ .

Vs: a)  $\frac{z}{(1-z)^2}$ , b)  $\frac{z(1+z)}{(1-z)^3}$ .

4. Määrää funktioiden

a)  $\cos z$ , b)  $\sinh z$ , c)  $\frac{z}{(z^2 + 1)^2}$

Taylorin kehitelmät origossa.

Vs. a)  $1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots$ , b)  $z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots$ , c)  $z - 2z^3 + 3z^5 - \dots$

5. Laske

$$\begin{aligned} \text{a)} \int_{\partial D_3(0)} \frac{dz}{(z-1)(z-2)^2}, \quad \text{b)} \int_{\partial D_3(0)} \frac{dz}{z^4 + 4z^3}, \quad \text{c)} \int_{\partial D_1(\frac{\pi}{2})} \tan z \, dz, \\ \text{d)} \int_{\partial D_{\frac{2\pi}{3}}(0)} \frac{dz}{z \sin z}, \quad \text{e)} \int_{\partial D_1(0)} e^{\frac{1}{z^n}} dz, \quad n \in \mathbb{N}, \quad \text{f)} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_3(0)} \frac{e^z}{z^2(z^2 + 2z + 2)} dz. \end{aligned}$$

Vs: a) 0, b)  $\frac{\pi i}{32}$ , c)  $-2\pi i$ , d) 0, e)  $2\pi i$ , jos  $n = 1$ ; muulloin 0, f)  $\frac{\cos 1}{2e}$ .

6. Laske

$$\begin{aligned} \text{a)} \int_{\partial D_5(0)} \frac{e^z}{\cosh z} dz, \quad \text{b)} \int_{\partial D_1(0)} e^{-1/z} \sin(1/z) dz, \\ \text{c)} \int_{\gamma} \frac{2 + 3 \sin \pi z}{z(z-1)^2} dz, \quad \text{missä } \gamma \text{ on pisteiden } 3 + 3i, 3 - 3i, -3 + 3i \text{ ja } -3 - 3i \text{ määrääm} \\ \text{neliön reunakäyrä.} \\ \text{d)} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{e^{zt}}{z(z^2 + 1)} dz, \quad t > 0, \quad \text{missä } \gamma \text{ on pisteiden } 1 + i, -1 + i, -1 - i \text{ ja } 1 - i \text{ määrää} \\ \text{män neliön reunakäyrä.} \end{aligned}$$

Vs. a)  $8\pi i$ , b)  $2\pi i$ , c)  $-6\pi i$ , d)  $1 - \cos t$ .

7. Laske

$$\text{a)} \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^4}, \quad \text{b)} \int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)^2}, \quad \text{c)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+4x+5)^2},$$

Vs. a)  $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$ , b)  $\frac{5\pi}{288}$ , c)  $\frac{\pi}{2}$ .

8. Laske

$$\text{a)} \int_0^{2\pi} \frac{\sin 3t}{5 - 3 \cos t} dt, \quad \text{b)} \int_0^{2\pi} \frac{\cos 2t}{13 - 12 \cos t} dt, \quad \text{c)} \int_0^{2\pi} \frac{\cos 3t}{(5 - 3 \cos t)^4} dt,$$

Vs. a) 0, b)  $\frac{8\pi}{45}$ , c)  $\frac{135\pi}{16384}$ .

9. Laske

$$\text{a)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x+2) \sin 3x}{x^2+1} dx, \quad \text{b)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x/\sqrt{2})}{x^4+\pi^4} dx, \quad \text{c)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin \pi x}{x^2+2x+5} dx,$$

Vs. a)  $\pi e^{-3}$ , b)  $e^{-\frac{\pi}{2}}/(\pi^2\sqrt{2})$ , c)  $-\pi e^{-2\pi}$ .