Lause 3.6.3

Olkoon $f: (G, \cdot) \to (H, *)$ homomorfismi.

1) Jos $D \leq G$, niin $f(D) \leq H$

2) Jos $T \leq H$, niin $f^{-1}(T) \leq G$.

Todistus

1) Olkoon $D \leq G$.

Selvästi $f(D) \subseteq H$ ja $f(D) \neq \emptyset$,

sillä $e_G \in D$ ja siten $f(e_G) = e_H \in f(D)$

Onko $f(D) \leq H$?

Olkoon $c, d \in f(D)$.

Tällöin on olemassa sellaiset alkiot

$a, b \in D$ että $f(a) = c$ ja $f(b) = d$.

Koska $D \leq G$, niin $a \cdot b^{-1} \in D$ (L333)

ja siten $f(a \cdot b^{-1}) \in f(D)$

eli $f(a) * f(b^{-1}) \in f(D)$ (f homomorf.)

eli $f(a) * f(b)^{-1} \in f(D)$ (L369)

eli $c * d^{-1} \in f(D)$.

Aliryhmäkriteerin (L333) nojalla

$$f(D) \leq H$$

2) Olkoon $T \leq H$

Selvästi $f^{-1}(T) \subseteq G$ ja $f^{-1}(T) \neq \emptyset$, sillä $e_H \in T$ ja siten $f^{-1}(e_H) = e_G \in f^{-1}(T)$.

Onko $f^{-1}(T) \leq G$?

Olkoon $a, b \in f^{-1}(T)$.

Näin ollen $f(a), f(b) \in T$.

Koska $T \leq H$, niin

$f(a) * f(b)^{-1} \in T$ (L 333)

eli $f(a) * f(b^{-1}) \in T$ (L 362)

eli $f(a \cdot b^{-1}) \in T$ (f homomorfismi)

eli $a \cdot b^{-1} \in f^{-1}(T)$

Aliryhmäkriteerin L 333 nojalla

$$f^{-1}(T) \leq G$$

$\square$