Lause 3.6.4

Olkoon $f:(G,\cdot)\to(H,*)$ homomorfismi

1) Jos $N \trianglelefteq G$ ja f on surjektio, niin
   $f(N) \trianglelefteq H$

2) Jos $M \trianglelefteq H$, niin $f^{-1}(M) \trianglelefteq G$

Todistus

1) Oletetaan, että $N \trianglelefteq G$ ja
   f surjektio $G \to H$.

   Lauseen 3.6.3 nojalla $f(N) \leq H$.

   Onko $f(N) \trianglelefteq H$?

   Olkoon $z \in f(N)$ ja $d \in H$.

   Siten $\exists$ $x \in N$ s.e $z = f(x)$ ja

   koska f surjektio $\exists$ $a \in G$ s.e $d = f(a)$.

   Koska $N \trianglelefteq G$, niin $a \cdot x \cdot a^{-1} \in N$ (L352)

   eli $f(a \cdot x \cdot a^{-1}) \in f(N)$

   eli $f(a) * f(x) * f(a^{-1}) \in f(N)$

   eli $f(a) * f(x) * f(a)^{-1} \in f(N)$

   eli $d * z * d^{-1} \in f(N)$

   Normaalisuuskriteerin L352 nojalla
   $f(N) \trianglelefteq H$

2) Oletetaan, että $M \trianglelefteq H$.

Lauseen 3.6.3 nojalla $f^{-1}(M) \leq G$.

Onko $f^{-1}(M) \trianglelefteq G$?

Olkoon $x \in f^{-1}(M)$ ja $a \in G$.

Nyt $f(x) \in M$ ja $f(a) \in H$.

Koska $M \trianglelefteq H$, niin

$$f(a) * f(x) * f(a)^{-1} \in M$$

eli $$f(a) * f(x) * f(a^{-1}) \in M$$

eli $$f(a \cdot x \cdot a^{-1}) \in M$$

eli $$a \cdot x \cdot a^{-1} \in f^{-1}(M)$$

Normaalisuuskriteerin L 3.5.2 nojalla

$$f^{-1}(M) \trianglelefteq G$$

$\square$