LUKUTEORIA JA RYHMÄT

Harjoitus 1, kevät 2011

1. Luku $2^{71}+15$ jaetaan luvulla $2^{67}-3$. Mikä on jakojäännös? (Ratkaise ilman laskinta!)

2. a) Esitä luku 417_8 kymmenjärjestelmän lukuna.
   b) Esitä luku 417_8 binäärijärjestelmän lukuna.

3. a) Esitä luku 123_{10} kahdeksanjärjestelmän lukuna.
   b) Esitä luku 1100011_2 kahdeksanjärjestelmän lukuna.

4. Määrää kaikki lukua 110 pienemmät alkuluvut.

5. Olkoon $n \in \mathbb{Z}_+$. Osoita, että
   a) $x^n - y^n = (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \cdots + xy^{n-2} + y^{n-1})$,
   b) $x^n + y^n = (x+y)(x^{n-1} - x^{n-2}y + \cdots - xy^{n-2} + y^{n-1})$, kun $2 \nmid n$,
   c) $x^n - y^n = (x+y)(x^{n-1} - x^{n-2}y + \cdots + xy^{n-2} - y^{n-1})$, kun $2 \mid n$.

6. Muotoa $2^n - 1$ olevia alkulukuja kutsutaan Mersennen alkuluvuiksi. Todista seuraava niitä koskeva väite:
   Jos $2^n - 1$ on alkuluku, niin myös n on alkuluku. Osoita myös, että käänteinen väite ei pidä paikkaansa. (Käänteinen väite: jos n on alkuluku, niin $2^n - 1$ on myös alkuluku.)

7. Todista: Jos $n \geq 3$ ja $n^2 + 2$ on alkuluku, niin $3|n$.